ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 65.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 28.

Α3. **α) ΛΑΘΟΣ**
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΛΑΘΟΣ

Α4. **α)** $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

β) $\left(x^{\nu}\right)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$.

γ) $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$.

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x^2 - \alpha x + 2.$$

Β1. Για να τέμνει η C_f τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1 πρέπει:
$f(1) = 0$, άρα $1 - a + 2 = 0$, άρα $-a = -3$, άρα $\alpha = 3$.

Έτσι προκύπτει $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Β2. Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0$.
Όμως $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$
Άρα $x \neq \pm 1$, οπότε $Ag = \mathbb{R} - \{-1,1\} = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$

Β3. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{1-2}{1+1} = \boxed{\frac{-1}{2}}$

Σημ. Η παραγοντοποίηση του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ μπορεί να γίνει με το σχήμα Horner:

$$\begin{array}{c|cc|l} 1 & -3 & 2 & 1 \\ \downarrow & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Ή και με διάσπαση του όρου $-3x$:

$x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-2)(x-1)$.

B4. Για $x = 0$ στον τύπο της $x^2 - 3x + 2$ f(x) = $x^2 - 3x + 2$, προκύπτει $f(0) = 2$.

Έτσι ζητείται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, 2)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο με τετμημένη 0 είναι της μορφής: $y = \alpha x + \beta$, όπου $\alpha = f'(0)$.

Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = 2x - 3$. Άρα $f'(0) = -3$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται έτσι $y = -3x + \beta$ (ε)

Όμως διέρχεται από το $A(0, 2)$ άρα $2 = -3 \cdot 0 + \beta$ ή $\beta = 2$.

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση (ε) είναι $y = -3x + 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τις τεταγμένες του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων συμπληρώνουμε την αντίστοιχη στήλη (fi).

Επίσης οι κεντρικές τιμές xi κάθε κλάσης προκύπτουν ως το ημιάθροισμα των άκρων αυτής.

Ύψος ιστογράμματος = fi

$\nearrow f_1 = 0{,}1$

$\nearrow f_2 = 0{,}3$

$\searrow f_3 = 0{,}2$

$\searrow f_4 = 0{,}4$

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
[4, 8)	6	5	**0,1**	36^o
[8, 12)	10	**15**	**0,3**	108^o
[12, 16)	14	**10**	**0,2**	**72^o**
[16, 20)	18	20	**0,4**	144^o
Σύνολο		50	1	360^o

Από τον τύπο $fi = \frac{\nu_i}{\nu} \Leftrightarrow \nu i = fi \cdot \nu$ υπολογίζουμε τις συχνότητες v_2, v_3:

$v_2 = f_2 \cdot v = 15$ και $v_3 = f_3 \cdot v = 10$

Τέλος, από τον τύπο $\alpha i = 3600 \cdot fi$ συμπληρώνουμε την τελευταία στήλη:

$$a_2 = f_2 \cdot 360 = 108$$
$$a_3 = f_3 \cdot 360 = 72$$

Γ2. Το πλήθος των εκπαιδευτικών που έχουν τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας είναι $v_2 + v_3 + v_4 = 45$.

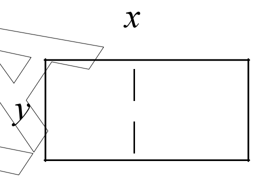
Γ3. Λιγότερο από 16 έτη υπηρεσίας έχουν συμπληρώσει: $f_1\% + f_2\% + f_3\% = 60\%$ των εκπαιδευτικών.

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι $E = f$ολ $=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τις διαστάσεις του ορθογωνίου οικοπέδου ισχύει: $x > 0$, $y > 0$.

Η περίμετρός του περιγράφεται από την ισότητα: $\Pi = 2x + 2y$



$\Pi = 80$ άρα $2x + 2y = 80$. Έτσι $x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$.

Το εμβαδό του οικοπέδου δίνεται από τη συνάρτηση:

$E(x) = x \cdot y = x(40 - x) = 40x - x^2$ άρα $\boxed{E(x) = -x^2 + 40x}$

Πρέπει:

$x > 0$

$y > 0 \Leftrightarrow 40 - x > 0 \Leftrightarrow x < 40$

Άρα $0 < x < 40$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Ε είναι το διάστημα Δ= (0,40)

Δ2. $E'(x) = -2x + 40$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow -2x = -40 \Leftrightarrow x = 20$

$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 40 > 0 \Leftrightarrow -2x > -40 \Leftrightarrow x < 20$

$E'(x) < 0 \Leftrightarrow -2x + 40 < 0 \Leftrightarrow -2x < -40 \Leftrightarrow x > 20$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	0		20		40
$E'(x)$		+	0	−	
$E(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Η E γνησίως φθίνουσα στο (0, 20], και γνησίως φθίνουσα στο [20, 40)

Δ3. $E_{\max} = E_{(20)} = 400m^2$ όταν $x = 20$

Δ4. Για τα μήκη x_A, x_B των οικοπέδων παρατηρούμε ότι:

$x_A = 29{,}5 > 20$ και $x_B = 34{,}2 > 20$.

Όμως επειδή έχουν περίμετρο 80, σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολής η συνάρτηση του εμβαδού τους είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (20, 40)

Συνεπώς:

$x_B > x_A \Leftrightarrow E(x_B) < E(x_A)$ και άρα το οικόπεδο Α έχει μεγαλύτερο εμβαδόν.

<u>εναλλακτικός τρόπος</u>

$x_A + y_A = 40 \Leftrightarrow y_A = 40 - 29{,}5 = 10{,}5m$

$E_A = 29{,}5 \cdot 10{,}5 = 309{,}75m^2$

$x_B + y_B = 40 \Leftrightarrow y_B = 40 - 34{,}2 = 5{,}8m$

Επομένως $E_A > E_B$