ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 135

Α2. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 51

Α3. Θεωρία Σχολ. βιβλίου σελ. 23

Α4. **α)** Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε όπου $x-1=y$, $y\in R$, οπότε $x=y+1$. Τότε προκύπτει $f(y)=y\cdot e^{1-y}$, $y\in R$.
Άρα $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in R$.

Β2. Η f παραγωγίσιμη στο R ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων:

$f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}=e^{1-x}\cdot(1-x)$

$f'(x)=0 \overset{e^{1-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$f'(x)>0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	max	↘

Η f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(1)=1$

Β3. $f''(x) = -e^{1-x}\cdot(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}\cdot(-1+x-1)$

$\Leftrightarrow f''(x) = e^{1-x}\cdot(x-2)$

$f''(x) = 0 \overset{e^{1-x}\neq 0}{\Leftrightarrow} x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$f''(x) = 0 \overset{e^{1-x}> 0}{\Leftrightarrow} x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$

Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

Η f κυρτή στο $[2, +\infty)$

Η C_f έχει σημείο καμπής το $\left(2, \dfrac{2}{e}\right)$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ:

α) Η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες γιατί είναι συνεχής στο R.

β) Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} \underset{u\to+\infty}{\overset{u=1-x}{=\!=}} \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

γ) Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} \underset{u\to-\infty}{\overset{u=1-x}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \cancel{\lambda}^{0}\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right) \underset{u\to-\infty}{\overset{u=1-x}{=\!=}}$$

$$= \lim_{u\to-\infty}(1-u)\cdot e^{u} = \lim_{u\to-\infty}\frac{1-u}{e^{-u}} =$$

$$\underset{\Delta LH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{(1-u)'}{\left(e^{-u}\right)'} = \lim_{u\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-u}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία ε: $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.

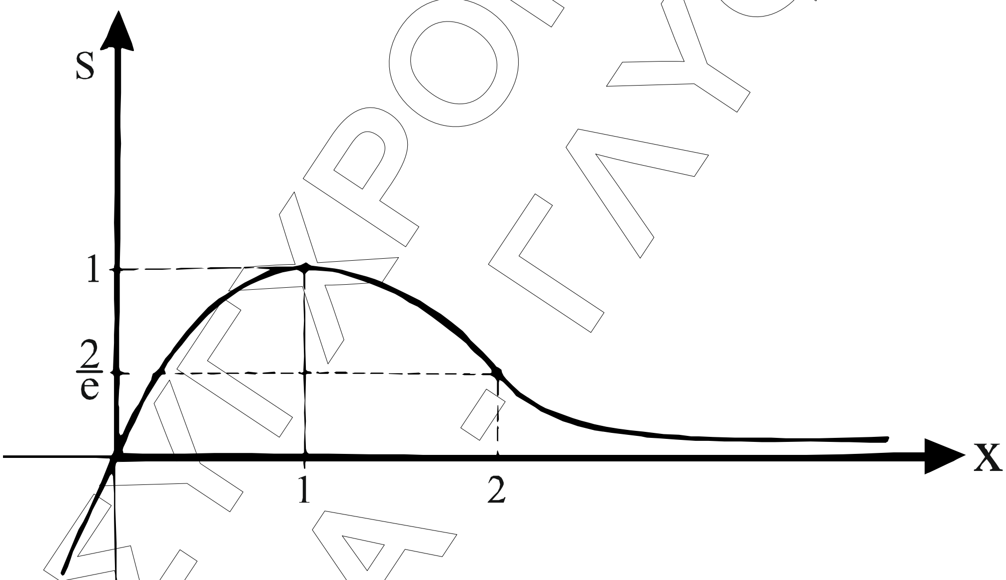
i) Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στα διαστήματα $(-\infty,\ 1]$ και $[1,\ +\infty)$:

$$f\left(-\infty,1\right) \overset{f \text{ γνησίως αύξουσα}}{=} (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)] = (-\infty,1].$$

$$\text{διότι : } \lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right) \overset{\substack{u->+\infty \\ u=1-x}}{=} = \lim_{u\to+\infty}\left(1-u\right)e^{u} = \left(-\infty\right)\cdot\left(+\infty\right) = -\infty$$

$$f([1,+\infty)) \overset{f \text{ γνησίως φθίνουσα}}{=} (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] = (0,1]$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty,\ 1]$.



ii)

- Αν $\lambda \leq 0$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα γιατί $\lambda \in (-\infty,\ 1]$ και $\lambda \notin (0,\ 1]$.

- Αν $0 < \lambda < 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες γιατί $\lambda \in (-\infty,\ 1]$ και $\lambda \in (0,\ 1]$.

- Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μία ρίζα το $x = 1$ γιατί για $x < 1 \overset{f \text{ αύξ.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) = 1$ και για $x > 1 \overset{f \text{ φθίν.}}{\Rightarrow} f(x) < f(1) = 1$.

- Αν $\lambda > 1$, η εξίσωση $f(x) = \lambda$ δεν έχει ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. ΣΥΝΕΧΕΙΑ:

Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική.

Η f συνεχής στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ διότι ισούται με τη βασική συνεχή συνάρτηση με τύπο συνx.

Στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \text{συν}x = 1$$

$$f(0) = 1$$

Άρα f συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Τελικά f συνεχής στο $\left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right]$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΣΤΟ $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + \cancel{1} - \cancel{1}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}(\alpha x^2 - 3x - 1)}{\cancel{x}} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{συν}x - 1}{x} = 0$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2

i)

- f είναι συνεχής στο $[0, \dfrac{3\pi}{2}]$ από το ερώτημα Γ1
- f παραγωγίσιμη στο $(0, \dfrac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = (\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$
- $f(0) = 1$
- $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \text{συν}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$
- $f(0) \neq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Άρα, ικανοποιούνται οι δύο πρώτες προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle αλλά δεν ικανοποιείται η τρίτη προϋπόθεση, οπότε δεν ισχύει το Θεώρημα Rolle.

ii)

$\forall x \in (0, \frac{3\pi}{2})$ είναι $f'(x) = -$ημx, οπότε: $f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -$ημ$\xi = 0 \Leftrightarrow$ ημ$\xi = 0 \Leftrightarrow$

ημ$\xi =$ ημ$0 \Leftrightarrow \xi = 2\kappa\pi$ ή $\xi = 2\kappa\pi + \pi \Leftrightarrow \xi = \kappa\pi$, $\kappa \in Z$

$0 < \xi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \frac{3}{2}$. Αφού $\kappa \in Z$, $\kappa = 1$.

Άρα $\xi = \pi$

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

$f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$

$\Delta = 36 + 12a$

Όμως $a < -3 \Rightarrow 12a < -36 \Leftrightarrow 36 + 12a < -36 + 36 \Leftrightarrow \Delta < 0$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη

Γ4.

Έχουμε $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$, αφού η $f'(x)$ είναι τριώνυμο με $\Delta < 0$ και αρνητικό συντελεστή για τον δευτεροβάθμιο όρο. Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

$f'(x) = -$ημ$x < 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$

Αφού f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $[0, \pi]$ και είναι συνεχής στο 0 θα είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα $(-\infty, \pi]$.

$f'(x) = -$ημ$x > 0 \ \forall x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Προκύπτει έτσι ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	-	‖	-	0	+	
$f(x)$	↘		↘	ο.ε. $\boxed{-1}$	↗	

Άρα η f έχει ελάχιστο στο π το $f(\pi) = -1$, άρα $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \dfrac{1}{x} =$

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \ln x - \dfrac{1}{x}, x > 0$

- $K(x)$ συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών
- $K(1) = \ln 1 - \dfrac{1}{1} = 0 - 1 = -1 < 0$
- $K(e) = \ln e - \dfrac{1}{e} = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$

Άρα $K(1) \cdot K(e) < 0$

Ικανοποιούνται επομένως οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano, άρα υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$.

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ:

$K'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα $K(x)$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Δ2. $f(x) = (\ln x)(x + 1) - \ln x - 1$

$f'(x) = \ln x_0 - \dfrac{1}{x}$.

Η $f'(x)$ έχει προφανή ρίζα το x_0 από το ερώτημα $Δ_1$.

$f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$ άρα f' γνησίως αύξουσα

Άρα η x_0 είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)$.

Για $0 < x < x_0 \overset{f' \text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0]$

Για $x > x_0 \overset{f' \text{γν.αύξ.}}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	ο.ε. $\boxed{0}$	↗	

Άρα έχει ολικό ελάχιστο στο x_0 με

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}\cdot\left(x_0+1\right)-\ln x_0-1\overset{\text{από }\Delta 1}{=}\frac{x_0+1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-1=1+\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}-1=0$$

Δ3

$$g(x)=x\cdot e^{-x},\ x\in\mathbb{R},\ h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x<0$, $g(x)<0$ και $h(x)>0$. Άρα η $g(x)=h(x)$ είναι αδύνατη.

Για $x=0$, $g(0)=0$ και $h(0)=1$. Άρα $g(x)\neq h(x)$.

Για $x>0$:

Αναζήτηση κοινού σημείου των C_g, Ch:

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \ln(x\cdot e^{-x})=\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x+\ln e^{-x}=(x+1)\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-\ln e)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x-x=\ln x_0\cdot(x+1)-x-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0\left(x+1\right)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=x_0$$

αφού από το Δ2 η f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο για $x=x_0$ το $f(x_0)=0$.

Άρα οι C_g και C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη x_0.

Κοινή εφαπτομένη στο κοινό σημείο με τετμημένη $3x_0$:

$$g'(x)=(x)'e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=e^{-x}-x\cdot e^{-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x_0)=e^{-x_0}-x_0\cdot e^{-x_0}=e^{-x_0}(1-x_0)=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}.$$

$$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\cdot(x+1)'=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x_0)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(\ln x_0-1)=$$

$$=\frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}}\cdot(\ln x_0-1)$$

Για να έχουν κοινή εφαπτόμενη οι δύο γραφικές παραστάσεις στο κοινό τους σημείο, πρέπει και αρκεί $g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow\frac{1-x_0}{e^{x_0}}=\frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}}\cdot(\ln x_0-1)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{\,x_0+1}}{e\cdot e^{x_0}}\cdot(\ln x_0 - 1) \overset{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow} e(1-x_0) = x_0^{\,x_0}\cdot x_0\left(\frac{1}{x_0}-1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e(1-x_0) = x_0^{\,x_0}\cdot x_0\,\frac{1-x_0}{x_0} \Leftrightarrow e(1-x_0) = x_0^{\,x_0}\cdot(1-x_0) \overset{(1-x_0)\neq 0,\,\text{άφου}\, x_0\in(1,e)}{\Leftrightarrow} e = x_0^{\,x_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln e = \ln x_0^{\,x_0} \Leftrightarrow 1 = x_0\cdot\ln x_0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}, \text{ που ισχύει από Δ1.}$$

Δ4.

$$A\big(x, f(x)\big),\quad B\big(x,\varphi(x)\big)$$

$$(AB) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (\varphi(x) - f(x))^2} =$$

$$= \sqrt{(\varphi(x) - f(x))^2} = |\varphi(x) - f(x)| \overset{f(x)>\varphi(x)}{=} f(x) - \varphi(x)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $d(x) = f(x) - \varphi(x)$ με $x \in (0, +\infty)$.

Έστω ότι η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Έστω ότι η $\varphi(x)$είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Αφού η συνάρτηση d έχει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο x_0 στο οποίο είναι παρ/μη, από το θεώρημα Fermat προκύπτει $d'(x_0) = 0$.

Έχουμε $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$ οπότε $d'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0)$

Από Δ2 η f έχει ελάχιστο στο x_0 με $f'(x_0) = 0$

Άρα $\varphi'(x_0) = 0$ δηλαδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.