ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

(ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Σελίδα 111 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.

Α2 Σελίδα 104 Σχολικού βιβλίου, ορισμός.

Α3 Σελίδα 74 Σχολικού βιβλίου, Θεώρημα.

Α4 α) Λ

β) Έστω $f(x)=x$ με $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

άρα το όριο της $\dfrac{1}{f}$ στο $x=0$ δεν υπάρχει.

Α5 α) Σωστό, β) Σωστό, γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1 Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}-\{3\}$

Με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \dfrac{3x_1+1}{x_1-3}=\dfrac{3x_2+1}{x_2-3}\Leftrightarrow 3x_1x_2+x_2-9x_1-3=3x_1x_2+x_1-9x_2-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10\cdot x_2=10\cdot x_1\Leftrightarrow x_2=x_1\Rightarrow f$ *είναι* "1−1" *επομένως αντιστρέφεται.*

Β2 Είναι $y=f(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{3x+1}{x-3}\Leftrightarrow yx-3y=3x+1\Leftrightarrow (y-3)x=3y+1$ (1)

Αν $y-3=0\Leftrightarrow y=3\overset{(1)}{\Rightarrow}0=10$ άτοπο

$\Rightarrow y\neq 3\overset{(1)}{\Rightarrow}x=\dfrac{3y+1}{y-3}$

Πρέπει $x\neq 3\Rightarrow \dfrac{3y+1}{y-3}\neq 3\Leftrightarrow 3y+1\neq 3y-9\Leftrightarrow 1\neq -9$ ισχύει

Άρα $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ *με* $x\neq 3$

Οι συναρτήσεις f *και* f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

$\mathrm{A} = \mathbb{R} - \{3\}$ και για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$

B3 Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει: $\left.\begin{smallmatrix} x\in \mathrm{A}_f \\ f(x)\in \mathrm{A}_f \end{smallmatrix}\right\}$

$\left.\begin{smallmatrix} x\neq 3 \\ f(x)\neq 3 \end{smallmatrix}\right\}$ $x \neq 3$ διότι $f(x) \neq 3$ από B_2.

Έτσι για $x \neq 3 \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

διότι από (B_2) είναι $f(x) = f^{-1}(x)$.

B4 Είναι $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x+1}{x-3} = \dfrac{0}{-\frac{10}{3}} = 0.$

Επίσης $\left| f(x)\cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right| \Rightarrow |f(x)|\cdot\left|\eta\mu \dfrac{1}{3x+1}\right| \leq |f(x)|$ (1)

αφού $\left|\eta\mu \dfrac{1}{3x+1}\right| \leq 1$ κοντά στο -1/3.

Άρα από (1) $\Rightarrow \left| f(x)\cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x)\cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$ (2)

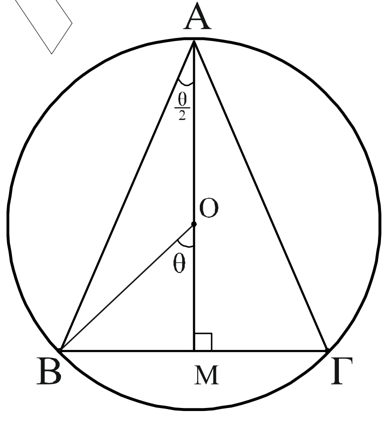
Είναι $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} |f(x)| = \left| \lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} f(x) \right| = 0$

Επίσης $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} (-|f(x)|) = 0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \left(f(x)\cdot \eta\mu \dfrac{1}{3x+1} \right) = 0$

από το κριτήριο παρεμβολής.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ έχουμεΟΜ = συνθ, ΟΑ = 1
ΒΜ = ημ θ



Άρα

$$\left(\mathrm{AB\Gamma}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{AM}\cdot\mathrm{B\Gamma}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{AO}+\mathrm{OM}\right)\cdot 2\mathrm{BM}=\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right)\cdot\eta\mu\theta \quad \theta\in\left(0,\pi\right).$$

Γ2. Θεωρώ $\mathrm{E}\left(\theta\right)=\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right)\cdot\eta\mu\theta \quad \theta\in\left(0,\pi\right)$

$$\mathrm{E}'\left(\theta\right)=-\eta\mu\theta\cdot\eta\mu\theta+\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=$$

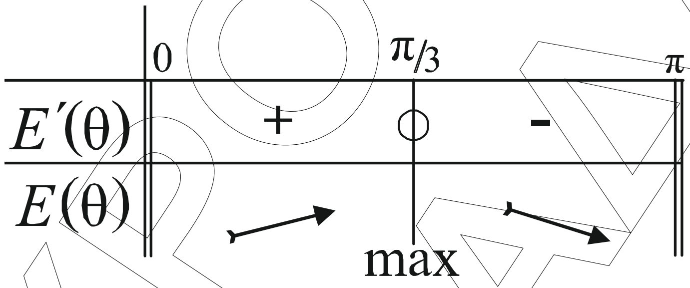
$$=-\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta=$$

$$=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1,\quad \theta\in\left(0,\pi\right)$$

$$\mathrm{E}'\left(\theta\right)=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=-1 \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{E}'\left(\theta\right)>0\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta<-1,\ \text{αδύνατη} \quad \acute{\eta} \quad \sigma\upsilon\nu\theta>\frac{1}{2} \overset{\theta\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} \theta<\frac{\pi}{3} \ \mu\varepsilon\ \theta>0$$

(διότι συνθ γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\pi\right)$).



Δηλαδή όταν $\theta=\frac{\pi}{3}$ έχω $\mathrm{E}\left(\theta\right)\to\max$, άρα η γωνία $\mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$ δηλαδή το ισοσκελές γίνεται ισόπλευρο.

Γ3. Έχω ότι $\varepsilon(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$

άρα $\mathrm{E}\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\lim\limits_{\theta\to 0^+}\mathrm{E}(\theta),\ \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}\mathrm{E}(\theta)\right)=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$

Επειδή $0<\frac{3}{4}<\frac{3}{4}\sqrt{3}\Rightarrow\frac{3}{4}\in E\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)$ υπάρχει μοναδικό $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right):\mathrm{E}\left(\theta_1\right)=\frac{3}{4}$

Η $\mathrm{E}(\theta)$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ με

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)\right)=\left(\lim\limits_{x\to\pi^-}\mathrm{E}(\pi),\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+}\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Δηλ $\frac{3}{4}\in\mathrm{E}\left(\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)\right)$ άρα υπάρχει μοναδικό $\theta_2\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right):\mathrm{E}\left(\theta_2\right)=\frac{3}{4}$

Γ4. Από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$ έχω ότι $\exists\ \xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right):\mathrm{E}'(\xi_1)=\dfrac{\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{E}(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}$

$\Leftrightarrow \mathrm{E}'(\xi_1)\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{E}(\theta_1)$ (1) και από Θ.Μ.Τ. στο $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$ έχω ότι

$\exists\ \xi_2\in\left(\frac{\pi}{3},\theta_2\right):\mathrm{E}'(\xi_2)=\dfrac{\mathrm{E}(\theta_2)-\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow \mathrm{E}'(\xi_2)\cdot\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)=\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\mathrm{E}(\theta_2)$ (2)

$(1)\ (2)\xrightarrow{\mathrm{E}(\theta_1)=\mathrm{E}(\theta 2)=\frac{3}{4}}\mathrm{E}'(\xi_1)\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)=\mathrm{E}'(\xi_2)\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{\lambda}{\lambda x}=\ln x+1-\dfrac{1}{x},\quad x>0.$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0\rightarrow f'$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Είναι $f'(1)=0$ και επομένως για $x>1\overset{f'\text{ γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)=0$

και για $0<x<1\overset{f'\text{ γν.αύξουσα}}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)=0$

X	0		1		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		↘		↗	

$f(1)=-ln\lambda$

Από τον πίνακα με το πρόσημο της f' έχουμε ότι η f είναι στο (0, 1] γνησίως φθίνουσα και στο [1, +∞) γνησίως αύξουσα και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x= 1 το $f(1)=-\ln\lambda$.

Άρα το ακρότατο είναι το $(1,-\ln\lambda)$ με $\lambda>0$ και η συνάρτηση $-\ln\lambda$ παίρνει τιμές στο $(-\infty,+\infty)$ και επομένως το ακρότατο θα βρίσκεται στην ευθεία $x=1$.

Δ2. $x^x\ge\lambda x\Leftrightarrow \ln x^x\ge\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge 0.$

Όμως $f(x)\ge-\ln\lambda$ από **Δ1.**, άρα πρέπει

$-\ln\lambda\ge 0\Rightarrow \ln\lambda\le 0\Leftrightarrow \ln\lambda\le\ln 1\Rightarrow \lambda\le 1\Rightarrow \lambda_{\mu\varepsilon\gamma}=1.$

Δ3. Είναι $g(x)=x^x=e^{x\ln x}$ με

$$g'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)'=g(x)\left(\ln x+1\right) \qquad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\left(x_0, g(x_0)\right)$ με $x_0>0$ είναι: $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$.

Για να διέρχεται από το O(0, 0) πρέπει:

$$-g(x_0)=g'(x_0)(-x_0)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} g(x_0)=g(x_0)\left(\ln x_0+1\right)x_0 \overset{g(x_0)>0}{\Leftrightarrow} 1=\left(\ln x_0+1\right)x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=\ln x_0+1 \Leftrightarrow \ln x_0-\frac{1}{x_0}+1=0 \qquad (2).$$

Θεωρώ $\lambda(x)=\ln x-\frac{1}{x}+1$ με $x>0$, είναι $\lambda'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0 \Rightarrow \lambda(x)$ γνησίως αύξουσα, άρα και '1-1'. Η (2) γίνεται $\lambda(x_0)=0 \Leftrightarrow \lambda(x_0)=\lambda(1) \underset{\lambda(1-1)}{\Leftrightarrow} x_0=1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\left(1, g(1)\right)$ δηλαδή στη (1, 1) είναι:

$y-g(1)=g'(1)(x-1) \Rightarrow y-1=x-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=x$ αφού $g(1)=g'(1)=1$.

Δ4. i)

$$h(x)=\begin{cases} x^x, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Για $x>0$, $h(x)=e^{x\ln x}$ συνεχής σαν σύνθεση και πράξεις μεταξύ συνεχών.

Είναι $\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$

Άρα $\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}\underset{\substack{x\to0^+\\u\to0}}{\overset{x\ln x=u}{=}}\lim_{u\to0}e^u=1=h(0)$ άρα η h συνεχής στο $[0,+\infty)$.

ii) Θεωρώ $k(x)=x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)\mathrm{dt}\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)\mathrm{dt}$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Είναι $k(0)=\int_0^1 h(1-t)\mathrm{dt}$. Θέτω $1-t=u \Rightarrow dt=-du$

Για $t=0 \Rightarrow u=1$ και για $t=1 \Rightarrow u=0$

άρα $k(0)=-\int_1^0 h(u)\mathrm{du}=\int_0^1 h(u)\mathrm{du}=\int_0^1 h(x)\mathrm{dx}=\int_0^1 g(x)\mathrm{dx}$ όμως $g(x)>0$ στο $[0,1]$

$\Rightarrow \int_0^1 g(x)\mathrm{dx}>0 \Rightarrow k(0)>0$.

Επίσης $k(1)=3-2\int_1^2 g(t)\mathrm{dt}$

Από Δ2 για $\lambda=1$: $x^x\ge x,\ x>0$

Δηλαδή $g(x)\ge x,\ x>0$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$.

Οπότε $\int_1^2 g(t)\mathrm{dt} > \int_1^2 t\mathrm{dt} = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3 - 2\int_1^2 g(t)\mathrm{dt} < 0$

Άρα $k(1) < 0$

Επομένως $k(0)\cdot k(1) < 0$, άρα για την $k(x)$ ισχύει το θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$ άρα η εξίσωση $k(x) = 0$ δηλαδή $x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\mathrm{dt}\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)\mathrm{dt} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).