

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. α. Ορισμός, σελίδα σχολικού βιβλίου 15.

β. i. Η συνάρτηση έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο A.

ii. Είναι η συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία για κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Η συνάρτηση αυτή g συμβολίζεται f^{-1} .

A2. Θεώρημα Fermat, σελίδα σχολ. βιβλίου 142.

A3. Θεώρημα, σελίδα σχολ. βιβλίου 135.

A4. α. Λάθος

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

A4. β) Λάθος. Έστω η $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \neq f(0) = 1$

A5. γ.

ΘΕΜΑ Β

B1. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$.

B2. Έστω συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - x = e^{-x} - x + 2$, $x \in [2, 3]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2, 3]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$$\left. \begin{aligned} g(2) &= e^{-2} - 2 + 2 = e^{-2} > 0 \\ g(3) &= e^{-3} - 3 + 2 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1 - e^3}{e^3} < 0 \end{aligned} \right\} g(2) \cdot g(3) < 0.$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

Επίσης $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1, οπότε η x_0 είναι μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

B3. $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow y - 2 = e^{-x} \Leftrightarrow \ln(y - 2) = -x \Leftrightarrow x = -\ln(y - 2) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = -\ln(y - 2), \quad y > 2$$

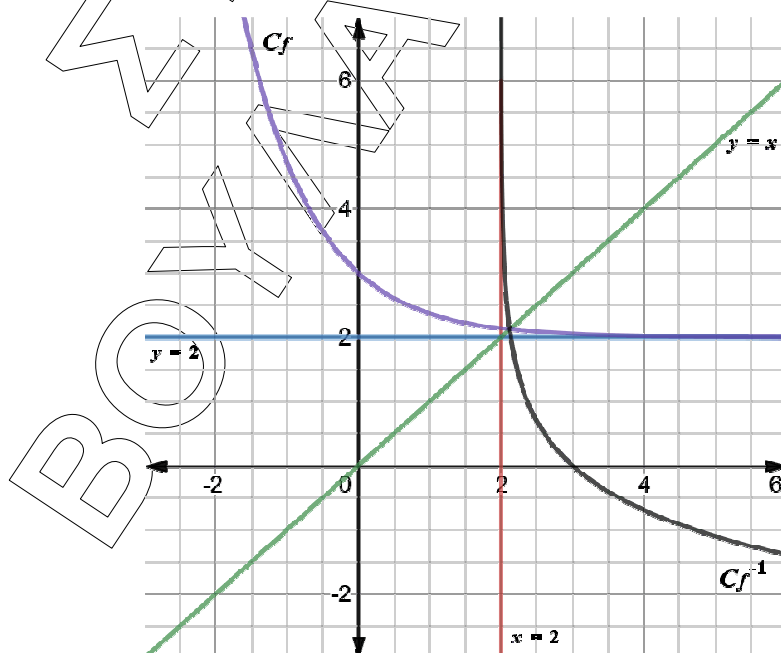
Άρα $f^{-1}(x) = -\ln(x - 2)$, $x > 2$.

B4. Είναι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = -\infty$, αφού εάν θέσουμε $x - 2 = u$ όταν $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] = -\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x - 2) = -\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = +\infty \quad \text{διότι}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty.$$

Άρα η $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f .



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ ως παραγωγίσιμη.

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 + \beta = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \alpha}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta}{1} = \beta + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - 1 - \alpha}{x - 1} = - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = 2$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, πρέπει $\beta + 1 = 2$, άρα $\beta = 1$, οπότε και $\alpha = 1$.

Γ2. Για $x > 1$, $f'(x) = 2x > 0$ (1)

για $x < 1$, $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ (2)

και f συνεχής στο 1. (3)

Από (1), (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

Άρα $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Γ3. i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Άρα υπάρχει $\kappa \in (-\infty, 0)$ ώστε $f(\kappa) < 0$, ενώ $f(0) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[\kappa, 0]$, άρα από Θεώρημα Bolzano στο $[\kappa, 0]$, υπάρχει $x_0 \in (\kappa, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$. Η x_0 είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της f .

$$\text{ii. } f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot (f(x) - x_0) = 0 \quad (1)$$

Ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > x_0$, άρα η (1) στο $(x_0, +\infty)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x) = x_0$.

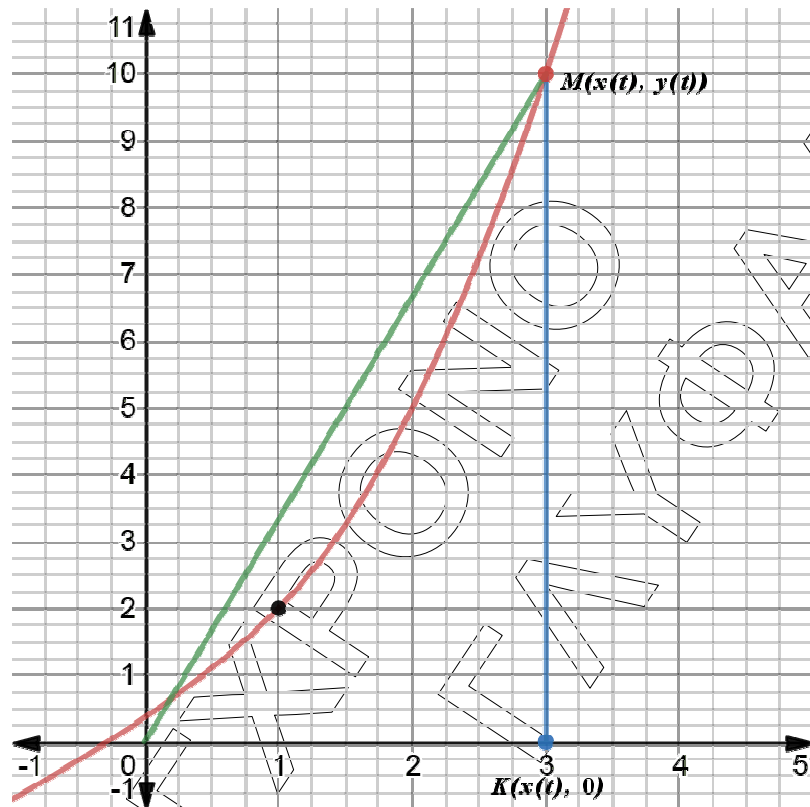
Η τελευταία είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$ διότι αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, από $x > x_0$ έπεται $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ ενώ $x_0 < 0$.

Γ4. $M(x(t), y(t)) \Rightarrow y(t) = x^2(t) + 1$

$x(t_0) = 3$

$y(t_0) = 10$

$x'(t_0) = 2$



$E(t) = \frac{1}{2} x(t)y(t) \Rightarrow$

$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t)y(t) + \frac{1}{2} x(t)y'(t) \Rightarrow$

$E'(t_0) = \frac{1}{2} x'(t_0)y(t_0) + \frac{1}{2} x(t_0)y'(t_0).$

Ισχύει: $y'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Άρα $E'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 28 \text{ τμ/s.}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$

$$\varepsilon: y = -x + 2$$

$$f(1) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 1$$

$$f'(1) = -1$$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + (x-1) \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2} + \alpha$$

$$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -1} \quad \text{και} \quad \boxed{\beta = 2}$$

Δ2 $f(x) = (x-1) \cdot \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$ Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[1, 2]$

$$\begin{aligned} E &= \int_1^2 |(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2| dx = \\ &= \int_1^2 |(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2)| dx = \int_1^2 |(x-1) \ln(x^2 - 2x + 1 + 1)| dx \\ &= \int_1^2 |(x-1) \ln[(x-1)^2 + 1]| dx \end{aligned}$$

$$\text{Για κάθε } x \in [1, 2] \text{ είναι } (x-1) \geq 0, \ln[(x-1)^2 + 1] \geq \ln 1 = 0.$$

$$\text{Έστω } u = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow du = (2x - 2) dx \Leftrightarrow$$

$$du = 2(x-1) dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} du = (x-1) dx$$

$$\text{Για } x = 1 \Rightarrow u_1 = 1$$

$$\text{Για } x = 2 \Rightarrow u_2 = 2$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \left[u \ln u \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 1 \cdot du = \\ &= \frac{1}{2} \left(2 \ln 2 \right) - \frac{1}{2} \cdot 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Δ3. i. Είναι $f'(x) = \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Προφανώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0. \text{ Η ισότητα ισχύει μόνο για } x=1, \text{ επομένως}$$

$$\ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow f'(x) \geq -1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii. Είναι για $\lambda \in \mathbb{R}, f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda-1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda-1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \quad (1). \text{ Αρκεί επομένως να δειχθεί η (1).}$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του

Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}. \text{ Όμως από } \Delta 3 \text{ (i), είναι } f'(\xi) \geq -1.$$

$$\text{Άρα } \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}. \text{ Αποδείχθηκε η (1) και}$$

ισοδύναμα η αρχική.

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -3x^2 - 1$.

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν κοινή εφαπτόμενη, αν και μόνον υπάρχουν σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$, ώστε να ταυτίζονται οι ευθείες :

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1) \cdot x + f(x_1) - f'(x_1) \cdot x_1 \text{ και}$$

$$y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2) \Leftrightarrow y = g'(x_2) \cdot x + g(x_2) - g'(x_2) \cdot x_2$$

Για να ταυτίζονται οι δύο αυτές ευθείες έπεται ότι αναγκαία θα πρέπει $f'(x_1) = g'(x_2)$

(Να έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης).

Είναι όμως:

- $f'(x_1) \geq -1, x_1 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_1 = 1$ (από **Δ3.i**.)
- $g'(x_2) \leq -1, x_2 \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει για $x_2 = 0$

Οπότε $f'(x_1) \geq g'(x_2)$ για κάθε ζεύγος (x_1, x_2) , με την ισότητα $f'(x_1) = g'(x_2)$ να ισχύει αποκλειστικά και μόνον για $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι $y = -x + 2$ και η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $B(0, 2)$ είναι $y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

Άρα η ε μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στα σημεία τους A, B αντίστοιχα.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΗΣ ΣΕ ΕΠΙΜΕΡΟΥΣ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ :

Γ3. i. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[1, +\infty)$ άρα :

$$f((-\infty, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2].$$

$$f([1, +\infty)) = (f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [2, +\infty).$$

Από τα επιμέρους σύνολα τιμών προκύπτει ότι υπάρχει x_0 στο διάστημα $(-\infty, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Ισοδύναμα $e^{x_0-1} + x_0 = 0$. Δηλαδή $x_0 = -e^{x_0-1} < 0$.

Δ3. i. Υπολογίζοντας τη δεύτερη παράγωγο της f έχουμε :

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{2(x-1)(x^2-2x+1+3)}{(x^2-2x+1+1)^2} = \frac{2(x-1)[(x-1)^2+3]}{[(x-1)^2+1]^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Προφανώς είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1)$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$.

Άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Κατά συνέπεια η f' παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) για $x_0=1$, οπότε $f'(x) \geq f'(1)=-1$.

Δ3. ii. Η προς απόδειξη ανίσωση ισοδυναμεί με την $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}$ (1).

Η (1) γράφεται ισοδύναμα $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda \Leftrightarrow g\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq g(\lambda)$ (2).

όπου $g(x) = f(x) + x$.

Όμως για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η (2) ισοδύναμα γράφεται $\lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda$ που ισχύει.