

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΕΠΑ.Λ.

8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. α. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28.
- A2. α. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.
β. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 59.
- A3. α. Λάθος (Λ)
β. Σωστό (Σ)
γ. Λάθος (Λ)
δ. Λάθος (Λ)
ε. Σωστό (Σ)

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$.

Έτσι από τον τύπο $\frac{s}{\bar{x}} = CV$ έχουμε $\frac{2}{\bar{x}} = 0,2 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow \bar{x} = 10$

B2. Είναι

$$\frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = \bar{x} \Leftrightarrow \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 52+\kappa = 60 \Leftrightarrow \kappa = 8$$

B3. Με $\kappa = 8$ οι τιμές του δείγματος σε αύξουσα σειρά είναι: 7, 8, 10, 11, 11, 13. Επειδή το πλήθος του δείγματος είναι 6 (άρτιος) η διάμεσος ισούται με το ημίαθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων. Δηλαδή $\delta = \frac{10+11}{2} = 10,5$.

Εύρος: $R = 13 - 7 = 6$.

B4. Εάν από κάθε τιμή του δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2 οι τιμές γίνονται: 5, 6, 8, 9, 9, 11. Τότε η νέα μέση τιμή $\bar{x}_1 = \frac{5+6+8+9+9+11}{6} = \frac{48}{6} = 8$.

Ενώ η νέα τιμή για την τυπική απόκλιση:

$$S_1 = \sqrt{\frac{(5-8)^2 + (6-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (9-8)^2 + (11-8)^2}{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{9+4+1+1+9}{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2.$$

Τότε ο νέος συντελεστής μεταβλητότητας γίνεται:

$$CV_1 = \frac{S_1}{\bar{x}_1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 > 0,1.$$

Από το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β τρόπος:

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου οι νέες τιμές για τη μέση τιμή \bar{x} και τυπική απόκλιση S_1 θα είναι

$$\bar{x}_1 = \bar{x} - 2 = 8$$

$$S_1 = S = 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρίζα πολυωνυμικής με:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 2x + 10} \right)' = \frac{(x^2 - 2x + 10)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2. Επειδή $\sqrt{x^2 - 2x + 10} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το πρόσημο και οι ρίζες της $f'(x)$ δίνονται από το πρόσημο και τις ρίζες του αριθμητή $x - 1$.

Έτσι

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Δηλαδή έχουμε τον πίνακα μεταβλητών:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$-$	\circ	$+$
f	\swarrow	min	\nearrow

Προκύπτει έτσι ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η f έχει ελάχιστη τιμή $f(1) = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 10} = \sqrt{9} = 3$.

για $x = 1$. Άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $M(5, f(5))$ έχει εξίσωση της

$$\text{μορφής } y = \lambda x + \beta, \text{ όπου } \lambda = f'(5) = \frac{5-1}{\sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) έτσι γίνεται $y = \frac{4}{5}x + \beta$.

Όμως η (ε) διέρχεται και από το σημείο $M(5, f(5))$

$$\text{άρα } f(5) = \frac{4}{5} \cdot 5 + \beta \Leftrightarrow 5 = 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Άρα η (ε) έχει εξίσωση $y = \frac{4}{5}x + 1$.

Γ4. Στην (ε) θέτουμε $x = 0$ οπότε $y = 1$. Έτσι παίρνουμε το σημείο $B(0, 1)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $y'y$.

$$\text{Αν τώρα θέσουμε } y = 0, \text{ παίρνουμε } \frac{4}{5}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow 4x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.$$

Έτσι βρίσκουμε το σημείο $A(-\frac{5}{4}, 0)$ στο οποίο η (ε) τέμνει τον $x'x$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το \mathbb{R} ως πολυωνυμική με:

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + \lambda x)' = 3x^2 - 6x + \lambda, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } \lambda = 3 \text{ είναι } f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2.$$

Προκύπτει ότι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, όμως η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το \mathbb{R} .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	\circ	$+$
f	\nearrow		

Είναι $\frac{3}{8} = \frac{2}{24}$ και $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$, οπότε $\frac{3}{8} < \frac{5}{6}$ και επειδή f είναι γνησίως αύξουσα προκύπτει

$$f\left(\frac{3}{8}\right) < f\left(\frac{5}{6}\right).$$

Δ2. Για $\lambda = 3$, είναι:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} &= \frac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \frac{3(x^2-2x+1)}{(\sqrt{x}-1)x(x-1)} = \frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)x(x-1)} = \\ &= \frac{3(x-1)}{x(\sqrt{x}-1)} = \frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)} = \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} \end{aligned}$$

Έτσι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{x} = \frac{3(\sqrt{1}+1)}{1} = 6$$

Δ3. Για $\lambda = 3$ είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ και $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης σε ένα σημείο με τετμημένη x_0 ισούται με $\lambda = f'(x_0) = 3(x_0 - 1)^2$. Όμως $3(x_0 - 1)^2 \geq 0$ με ελάχιστη τιμή την τιμή $\lambda = 0$ για $x_0 = 1$.

Δηλαδή στο το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το $A(1, f(1))$ δηλαδή το $A(1, 1)$.

Δ4. Για $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$, $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η f' είναι τριώνυμο του οποίου οι ρίζες και το πρόσημο εξαρτώνται από την διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda = 36 - 12\lambda$.

α. Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda > 0 \Leftrightarrow -12\lambda > -36 \Leftrightarrow \lambda < 3$
τότε η f' έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ και προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
f'	+	0	0	+
f		↘ max ↘	↗ min ↗	

β. $\Delta = 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$. Τότε η f' έχει μία ρίζα διπλή και όπως απαντήθηκε στο ερώτημα Δ1, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ. Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 3$: Τότε η f' δεν έχει ρίζες και προκύπτει ο επόμενος πίνακας:

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	↗	

Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Από α, β, γ προκύπτει ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα για $\lambda \geq 3$. Δηλαδή η μικρότερη τιμή για την οποία δεν παρουσιάζει ακρότατα είναι $\lambda = 3$.

ΒΟΥΛΑ, ΓΛΥΧΡΟΝΟ, ΓΛΥΦΑΔΑ