ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 31.

Α2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14.

Α3. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 72:
Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Α4. **α)** Σ, **β)** Λ, **γ)** Λ, **δ)** Σ, **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για τη μέση τιμή $\bar{x}$ είναι:

α. $$\bar{x} = \frac{\nu_1 \cdot x_1 + \nu_2 \cdot x_2 + \nu_3 \cdot x_3 + \nu_4 \cdot x_4}{10} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot 5 + 1\cdot 9}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

β. Οι παρατηρήσεις διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά είναι:
1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 9.
Το μέγεθος του δείγματος είναι ν = 10 που είναι άρτιος αριθμός. Έτσι
$$\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+5}{2} = 4.$$

γ.
$$s^2 = \frac{\nu_1\left(x_1-\bar{x}\right)^2 + \nu_2\left(x_2-\bar{x}\right)^2 + \nu_3\left(x_3-\bar{x}\right)^2 + \nu_4\left(x_4-\bar{x}\right)^2}{10} =$$
$$= \frac{2(1-4)^2 + 3(3-4)^2 + 4(5-4)^2 + 1(9-4)^2}{10} =$$
$$= \frac{2\cdot 9 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 25}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

Β2. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές υπολογίζουμε το συντελεστή μεταβολής $cv = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{100} > \frac{10}{100}$.
Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 1$.
Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$$

και κατασκευάζουμε πίνακα μεταβολών της f.

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
f′	-		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

Είναι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
Άρα η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1/2$, ελάχιστο $f(1/2) = 3/4$.

Γ2. Είναι $f(2) = 2^2 - 2 + 1 = 4 - 2 + 1 = 3$, οπότε $A(2, 3)$.
Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(2, 3)$. Τότε θα έχουμε:

$$3 = 2\alpha + \beta \qquad (1)$$

Όμως $\alpha = f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 \qquad (2)$
Από τις (1) και (2) βρίσκουμε $\beta = -3$.
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) στο σημείο Α(2, 3) είναι

$$y = 3x - 3 \qquad (\varepsilon).$$

Γ3.

- Για $y = 0$ η (ε) γράφεται $3x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
  Επομένως η (ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $B(1, 0)$.
- Για $x = 0$ η (ε) γράφεται $y = 3 \cdot 0 - 3 \Leftrightarrow y = -3$
  Επομένως η (ε) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, -3)$.

Γ4. Είναι:

$$\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x-1} = \frac{x^2-x+1-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$$

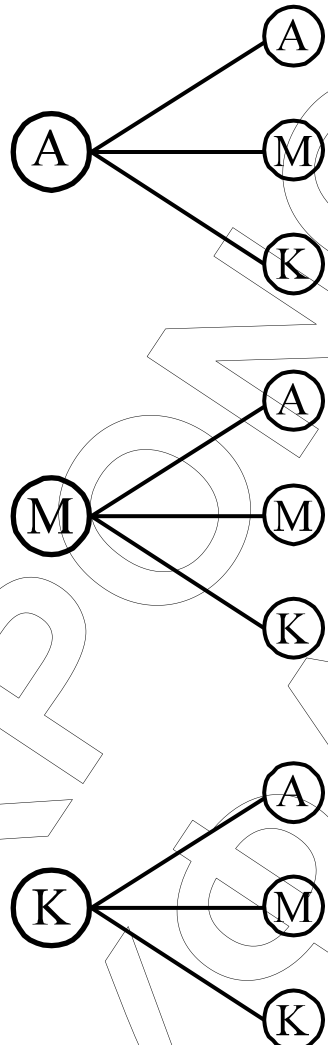
$$= \frac{x^2-x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} = \frac{x(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)} =$$

$$= \frac{x}{\left(\sqrt{x^2-x+1}+1\right)}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{f(x)}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από το πείραμα προκύπτει το εξής δενδροδιάγραμμα:



Έτσι ο αντίστοιχος δειγματικός χώρος είναι:

$$\Omega = \{ AA, AM, AK, MA, MM, MK, KA, KM, KK\}$$

Δ2. $A = \{AM, MM, KM\}$
$B = \{ AM, AK, MA, MK, KA, KM \}$

Δ3. **α.** Από το **Δ2** προκύπτει ότι:
$N(A) = 3$, $N(B) = 6$, ενώ $N(\Omega) = 9$.

Έτσι είναι:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ άρα } P(A') = 1 - P(A) = \frac{2}{3}.$$

$A \cap B = \{AM, KM\}$, με $N(A \cap B) = 2$, άρα:

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{9}.$$

- $A - B = \{ MM \}$, $N(A - B) = 1$, άρα:
  $P(A-B) = \dfrac{N(A-B)}{N(\Omega)} = \dfrac{1}{9}$.
- $B - A = \{ AK, MA, MK, KA \}$, $N(B–A) = 4$, άρα:
  $P(B-A) = \dfrac{N(B-A)}{N(\Omega)} = \dfrac{4}{9}$.

β) Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το Α, όσο και με το Β, δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.

Άρα το Γ είναι υποσύνολο του $\left(A \cup B\right)' = \left\{AA, KK\right\}$

Άρα $\Gamma \subseteq \left(A \cup B\right)' \Rightarrow P(\Gamma) \leq P\left[\left(A \cup B\right)'\right] \Rightarrow P(\Gamma) \leq \dfrac{2}{9}$.

Προκύπτει ότι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να έχει η $P(\Gamma)$ είναι $\dfrac{2}{9}$.

β' τρόπος

Για να είναι το ενδεχόμενο Γ ασυμβίβαστο τόσο με το Α, όσο και με το Β, δεν θα πρέπει να έχει κανένα κοινό στοιχείο με το ενδεχόμενο $A \cup B$.
Άρα θα είναι:

$\Gamma = \{AA\}$ με $P(\Gamma) = \dfrac{1}{9}$ ή

$\Gamma = \{KK\}$ με $P(\Gamma) = \dfrac{1}{9}$ ή

$\Gamma = \{AA, KK\}$ με $P(\Gamma) = \dfrac{2}{9}$.

Προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή για το $P(\Gamma)$ είναι $\dfrac{2}{9}$.