ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2016

Ενδεικτικές απαντήσεις

Μαθηματικά

προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 232.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 303.

Α3. **α.** Λάθος **β.** Σωστό **γ.** Σωστό **δ.** Λάθος **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το Α(3,2) ανήκει στη γραφική παράσταση άρα $f(3)=2 \Leftrightarrow \frac{3\alpha-1}{4}=2 \Leftrightarrow \alpha=3$.

Β2. $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$ με $x\neq -1$

Έστω $x_1,x_2\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ με

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{3x_1-1}{x_1+1}=\frac{3x_2-1}{x_2+1}\Leftrightarrow (3x_1-1)(x_2+1)=(3x_2-1)(x_1+1)\Leftrightarrow x_1=x_2$$

άρα η f είναι 1-1.

Β3. Η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται

$$f(x)=y\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1}=y\Leftrightarrow 3x-1=y(x+1)\Leftrightarrow 3x-1=yx+y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x-yx=y+1\Leftrightarrow (3-y)x=y+1\underset{y\neq 3}{\Leftrightarrow} x=\frac{y+1}{3-y}$$

Άρα η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3-x}$ με $x\neq 3$.

Β4. για $x\neq 3$ και $x\neq 1$

$$f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1}=\frac{x+1}{3-x}\Leftrightarrow (x+1)^2=(3x-1)(3-x)\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$$

Τελικά κοινό σημείο της $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι το Α(1,1).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=x+1-\frac{1}{x-2}$ με $x>2$

Η f παραγωγίσιμη και συνεχής στο $(2,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Με $f'(x)=1+\frac{1}{(x-2)^2}>0$ με $x>2$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

η f' παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με $f''(x)=-\dfrac{2}{(x-2)^3}<0$ αφού $x>2$ άρα η f κοίλη στο $(2,+\infty)$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x+1-\dfrac{1}{x-2}\right)=-\infty$ άρα κατακόρυφη ασύμπτωτη ε: x=2

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x-2)}\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{(x-2)}\right)=1$$

Άρα πλάγια ασύμπτωτη ε1:y=x+1 στο $+\infty$.

Γ3. $E=\displaystyle\int_\lambda^{\lambda+1}|f(x)-x-1|dx=\int_\lambda^{\lambda+1}\left|-\frac{1}{x-2}\right|dx\overset{x\geq\lambda>2}{=}\int_\lambda^{\lambda+1}\frac{1}{x-2}dx=[\ln(x-2)]_\lambda^{\lambda+1}=\ln(\lambda-1)-\ln(\lambda-2)=\ln\frac{\lambda-1}{\lambda-2}$

τ.μ.

Γ4. $E(\lambda)>\ln 2\Leftrightarrow \ln\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}>\ln 2\Leftrightarrow\dfrac{\lambda-1}{\lambda-2}>2\overset{\lambda>2}{\Leftrightarrow}\lambda-1>2\lambda-4\Leftrightarrow\lambda<3$

Τελικά $2<\lambda<3$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x>0, x\neq 1$, η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot\ln x}{x-1}=\dfrac{0}{-1}=0=f(0)$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$. Άρα η f είναι συνεχής και στο $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\cdot\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}(\ln x+1)=1=f(1)$. Άρα η f είναι συνεχής και στο $x=1$.

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$.

Δ2. $f'(x)=\dfrac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}=\dfrac{x-\ln x-1}{(x-1)^2}$, $x>0$, $x\neq 1$. Ισχύει για κάθε $x>0$ ότι $\ln x\leq x-1$, με το ίσον να ισχύει μόνο στο $x=1$. Άρα $x-\ln x-1>0$ για $x>0$, $x\neq 1$. Άρα $f'(x)>0$ για $x>0$, $x\neq 1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Δ3. Για $x=1$ έχουμε $f(1)=f(1)+\ln 1\Leftrightarrow f(1)=f(1)$ που ισχύει. Για $x>0$, $x\neq 1$ έχουμε:

$f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}+\ln x=\dfrac{-\frac{\ln x}{x}}{\frac{1-x}{x}}+\ln x=\frac{\ln x}{x-1}+\ln x=\frac{\ln x}{x-1}=f(x)$. Άρα για $x>0$ έχουμε $f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x=f(x)$.

Δ4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(e^x)}{e^{f(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{e^x\cdot x}{e^x-1}}{e^{f(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot e^x}{(e^x-1)\cdot e^{f(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}\cdot\dfrac{x}{e^{f(x)}}=A$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{f(x)}}\overset{\Delta 3}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\cdot e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=B$. Θέτουμε $u=\frac{1}{x}$, με $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to0}f(u)=f(0)=0$, αφού f συνεχής στο 0. Είναι $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f\left(\frac{1}{x}\right)}}=$

$=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{1}{e^{f(u)}}=1$. Τελικά $A=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x-1}\cdot\dfrac{x}{e^{f(x)}}=1\cdot1=1$.