

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ: 260

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ: 169

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ: 280

A4.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος



ΘΕΜΑ Β

B1. $D_f = (1, 5) \cup (5, 9]$ και $f(D_f) = (-2, 5]$

B2.

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$

β) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2$ και $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$

αφού $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ δεν υπάρχει το όριο

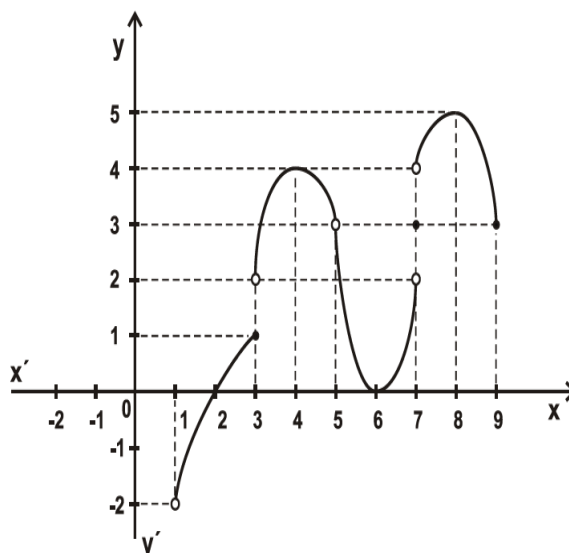
στο $x_0=3$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 3$ άρα $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$

δ) $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2$ αφού

$\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x)$ δεν υπάρχει το όριο στο $x_0=7$

ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = 3$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

B3.

α) Από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

Για $x > 2$, $f(x) > 0$, κοντά στο 2, άρα $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Για $x < 2$, $f(x) < 0$, κοντά στο 2, άρα $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

Τελικά δεν υπάρχει το όριο.

β) Από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 0$, $f(x) > 0$ κοντά στο $x_0=6$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

γ) Από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=8$, $\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(8) = 5$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 5} f(u) = 3$$

B4. Η f δεν είναι συνεχής στα $x_0=3$, $x_0=7$ αφού δεν υπάρχουν τα όρια (από ερώτημα B2).

B5. Από τη γραφική παράσταση έχουμε ότι στα $x_0=4$, $x_0=6$ και $x_0=8$, ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$, αφού η εφαπτομένη σε αυτά είναι παράλληλη στον άξονα xx' .

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$f(x) = x^3$, $D_f = \mathbb{R}$, η f παραγωγίσιμη και συνεχής ως πολυώνυμική στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως «1-1» άρα αντιστρέφεται.

$$D_{f^{-1}} = f(D_f) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \quad (1)$$

$$\text{Αν } y \geq 0, \text{ τότε } (1) \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

$$\text{Αν } y < 0, \text{ τότε } (1) \Rightarrow x = -\sqrt[3]{|y|}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Γ2. $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3 \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0.$

Ισοδύναμα θα αποδείξουμε ότι: $\eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0$ (2) για κάθε $x > 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3$, με $D_h = [0, +\infty)$, παραγωγίσιμη και συνεχής στο $[0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων (τριγωνομετρικής και πολυωνυμικής) με

$h'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2$, με προφανή ρίζα το $x_0=0$ αφού $h'(0)=0$. Η h' παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ως άθροισμα παραγωγισίμων με $h''(x) = -\eta\mu x + x$.

Για $x > 0$ ισχύει ότι $|\eta\mu x| < |x| \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Leftrightarrow x > -\eta\mu x > -x \Leftrightarrow 2x > -\eta\mu x + x > 0$

Επομένως $h''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η h' γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$x > 0 \stackrel{h' \nearrow}{\Leftrightarrow} h'(x) > h'(0) \Leftrightarrow h'(x) > 0$ άρα η h γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ επομένως

$x > 0 \stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3 > 0$ τελικά ισχύει η (2) για κάθε $x > 0$.

Γ3.

$y(t) = x^3(t)$, $t \geq 0$ άρα $y'(t) = 3x^2(t)x'(t)$ (3).

Για κάποια χρονική στιγμή t_0 , θα ισχύει $y'(t_0) = x'(t_0)$.

$$(3) \stackrel{t=t_0}{\Rightarrow} y'(t_0) = 3x^2(t_0)x'(t_0) \stackrel{\substack{x'(t_0)=y'(t_0) \\ x'(t_0)>0}}{\Leftrightarrow} 1 = 3x^2(t_0) \Leftrightarrow x^2(t_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x(t_0) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ όμως } x(t) \geq 0$$

άρα $x(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Τελικά το σημείο είναι $M(x(t_0), y(t_0))$ δηλαδή $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Γ4.

Η g άρτια στο $\mathbb{R}$, άρα $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f περιττή στο $\mathbb{R}$, άρα $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$A = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \stackrel{\substack{u=-x \\ du=-dx \\ u_1=1 \\ u_2=-1}}{=} \int_1^{-1} -f(-u)g(-u)du \stackrel{\substack{g \text{ άρτια} \\ f \text{ περιττή}}}{=} \int_1^{-1} f(u)g(u)du = -A \Leftrightarrow 2A = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Για $0 < x < 1$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $\frac{\ln x}{x}$ (πηλίκο συνεχών) και 1.

Για $x > 1$ η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln x}{x-1} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1.$$

$f(1) = 1$. Άρα η f είναι συνεχής και στο $x = 1$. Τελικά η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x + 1 \right) = -\infty$. Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

Δ2.

Εξετάζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\ln x}{x} + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x-1} \right) = 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} =$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{2x^2} \right) = -\frac{1}{2}. \text{ Άρα η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } x = 1, \text{ το οποίο είναι}$$

εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$, επομένως είναι κρίσιμο σημείο της f . Η f είναι παραγωγίσιμη

$$\text{στο } (0, 1) \text{ με } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ και στο } (1, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}.$$

Για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, απορρίπτεται. Δηλαδή $f'(x) \neq 0$, $0 < x < 1$.

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - x \ln x = 0$. Θεωρούμε $\varphi(x) = x - 1 - x \ln x$, $x \geq 1$. Είναι $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x < 0$, για $x > 1$. Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ οπότε η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα. Δηλαδή $f'(x) \neq 0$, $x > 1$. Τελικά το $x_0 = 1$ είναι μοναδικό κρίσιμο σημείο αφού η f δεν παραγωγίζεται σε αυτό και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Δ3.

i) Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f .

Για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ (1). Έχουμε για

$0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow -\ln x > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 1 > 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f'(x) > 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$.

Άρα $f((0, 1]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] \stackrel{\Delta 1.}{=} (-\infty, 1]$ όπου ανήκει και το μηδέν οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1]$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$.

Για $x > 1$ είναι $f'(x) = \frac{x - 1 - x \ln x}{x(x-1)^2}$ (2). Στο Δ2. δείξαμε ότι η $\varphi(x) = x - 1 - x \ln x$ είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ οπότε για $x > 1 \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1) = 0$. Από (2) $\Rightarrow f'(x) < 0$, για $x > 1$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.

Άρα, $f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (0, 1)$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Το μηδέν δεν ανήκει στο οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $(1, +\infty)$.

Τελικά η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

ii) Λόγω του Δ3. i) η ρίζα $x_0 \in (0, 1]$ οπότε το διάστημα ολοκλήρωσης για το εμβαδόν είναι το $[x_0, 1]$. Από το Δ3. i) είναι f γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ οπότε f γνησίως αύξουσα και στο

$[x_0, 1] \subseteq (0, 1]$. Για $x_0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow f(x) \geq 0$. Άρα

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_0}^1 f(x) dx = \int_{x_0}^1 \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) dx = \int_{x_0}^1 \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x + 1 \right) dx = \int_{x_0}^1 ((\ln x)' \cdot \ln x + 1) dx = \\ &= \int_{x_0}^1 (\ln x)' \ln x dx + \int_{x_0}^1 1 dx = \frac{1}{2} \int_{x_0}^1 2(\ln x)' \ln x dx + [x]_{x_0}^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln^2 x \right]_{x_0}^1 + 1 - x_0 = \frac{1}{2} (\ln^2 1 - \ln^2 x_0) + 1 - x_0 = -\frac{\ln^2 x_0}{2} + 1 - x_0 \quad (3). \end{aligned}$$

Είναι $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x_0}{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0$ (4). Από

$$(3) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} E = -\frac{(-x_0)^2}{2} + 1 - x_0 = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Δ4. Για $x > 1$ θα δείξουμε ισοδύναμα

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2) \Leftrightarrow xF(x) + F(x) > xF(1) + F(x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(F(x) - F(1)) > F(x^2) - F(x) \stackrel{x>1}{\Leftrightarrow} F(x) - F(1) > \frac{F(x^2) - F(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(x) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)}. \text{ Είναι } 1 < x < x^2 \text{ οπότε η } F \text{ είναι συνεχής στα διαστήματα } [1, x],$$

$[x, x^2]$ και παραγωγίσιμη στα $(1, x), (x, x^2)$. Από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x^2)$

$$\text{τέτοια, ώστε } F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \quad (5), \text{ αφού } F'(x) = f(x), \text{ και}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)} \quad (6). \text{ Είναι}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f \downarrow}{\Rightarrow}_{\text{στο } [1, +\infty)} f(\xi_1) > f(\xi_2) \stackrel{(5),(6)}{\Leftrightarrow} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} > \frac{F(x^2) - F(x)}{x(x-1)}.$$

