ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μαθηματικά

προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ: 262

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ: 141

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ: 246-247

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ισχύει ότι $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}, D_f=\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως πηλίκο πολυωνύμων με

$$f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ έχει στο χ=0 ολικό ελάχιστο το f(0)=0.

Β2.

$$f''(x)=\frac{2\left(-3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3},\ f''(x)\geq\frac{2\left(-3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}\Leftrightarrow -3x^2+1\geq 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και κοίλη στα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

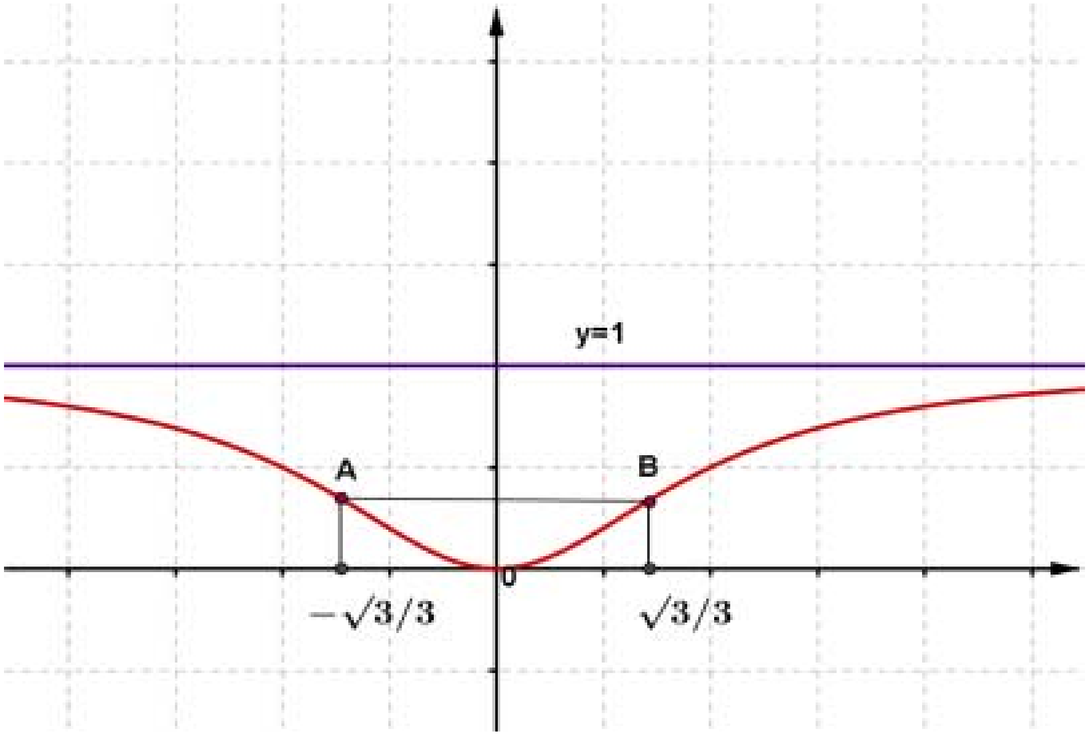
Τα σημεία καμπής είναι $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$

Β3.

Δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, αφού συνεχής στο R.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ άρα οριζόντια ασύμπτωτη ε: y=1

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$

$g'(x)=e^x-1$

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$. Η g έχει ολικό ελάχιστο στο 0, και ισχύει ότι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η ισότητα ισχύει μόνο για x=0.

$e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow g\left(x^2\right)=0 \Leftrightarrow x=0$

Γ2. $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Rightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right| \Leftrightarrow |f(x)|=\left|g(x^2)\right| \overset{g(x^2)\geq 0}{\Leftrightarrow} |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$e^{x^2}-x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$

$f(x)\neq 0$, για $x\in(-\infty,0)$ και για $x\in(0,+\infty)$, συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο για κάθε για $x\in(-\infty,0)$ και για $x\in(0,+\infty)$

Περίπτωση 1. Αν $f(x)>0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$

Τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$,αφού συνεχής στο 0.

Περίπτωση 2. Αν $f(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ για $x\in(0,+\infty)$

Τότε $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$,αφού συνεχής στο 0.

Περίπτωση 3. Αν $f(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$

Τότε $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, x>0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, x\le 0 \end{cases}$ $x\in\mathbb{R}$, αφού συνεχής στο 0.

Περίπτωση 4. Αν $f(x)>0$ για $x\in(-\infty,0)$ και $f(x)<0$ για $x\in(0,+\infty)$

Τότε $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, x\le 0 \\ -e^{x^2}+x^2+1, x>0 \end{cases}$ $x\in\mathbb{R}$, αφού συνεχής στο 0.

Γ3.

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2\ge 0$ γιατί $x^2\ge 0\Leftrightarrow e^{x^2}\ge 1\Leftrightarrow 2e^{x^2}\ge 2\Leftrightarrow 2e^{x^2}-2\ge 0$ και $4x^2e^{x^2}\ge 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4.

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=f(x+3)-f(x)$, παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παρ/μων με $\varphi'(x)=f'(x+3)-f'(x)$, η f κυρτή άρα f' γνησίως αύξουσα.

$x<x+3\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x+3)\Rightarrow\varphi'(x)>0\Rightarrow\varphi\nearrow$ άρα και 1-1.

Η εξίσωση που δίνεται ισοδύναμα γράφεται $\varphi(|\eta\mu x|)=\varphi(x)\Leftrightarrow|\eta\mu x|=x\Leftrightarrow x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\cdot\eta\mu x dx=\pi\Leftrightarrow\int_0^\pi f(x)\cdot\eta\mu x dx+\int_0^\pi f''(x)\cdot\eta\mu x dx=\pi\Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)'dx+\int_0^\pi (f'(x))'\cdot\eta\mu x dx=\pi\Leftrightarrow$$

$$[-f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx+[f'(x)\eta\mu x]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi\Leftrightarrow$$

$$[-f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi+[f'(x)\eta\mu x]_0^\pi=\pi\Leftrightarrow$$

$$-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0=\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad \mathbf{(1)}.$$

Θέτουμε $\kappa(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\Leftrightarrow f(x)=\kappa(x)\cdot\eta\mu x,\ \eta\mu x\ne 0$ **(2)**, με $\lim\limits_{x\to 0}\kappa(x)=1$.

Από $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\kappa(x)\cdot\eta\mu x\Leftrightarrow f(0)=1\cdot 0=0$, αφού f συνεχής στο 0.

Από $(1)\Rightarrow f(\pi)=\pi$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1\ \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\Leftrightarrow}}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=1\Leftrightarrow f'(0)=1$. Άρα $f'(0)=1$.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Δ2.

α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0. Τότε από Θ. Fermat είναι $f'(x_0)=0$ **(3)**. Παραγωγίζουμε την οπότε $e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x$ (4), $x\in\mathbb{R}$. Θέτουμε στην (4) όπου x το x_0 οπότε $e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\overset{(3)}{\Leftrightarrow} e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0$, άτοπο. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως δύο φορές παραγωγίσιμη και $f'(x)\neq 0, x\in\mathbb{R}$, από το Δ2. α). Άρα η f' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f'(0)=1>0$ είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3.

Είναι $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ **(5)**. Όμως f γνησίως αύξουσα οπότε
$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$ **(6)**. Από (5),(6) έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\dfrac{2}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\dfrac{2}{|f(x)|}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{2}{|f(x)|}\right)=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{|f(x)|}\right)$. Από το κριτήριο παρεμβολής είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$.

Δ4. Για $x\in[1,e^\pi]$ έχουμε

$$1\le x\le e^\pi\Leftrightarrow \ln 1\le\ln x\le\ln e^\pi\Leftrightarrow 0\le\ln x\le\pi\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(0)\le f(\ln x)\le f(\pi)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0\le f(\ln x)\le\pi\overset{x>0}{\Leftrightarrow}0\le\dfrac{f(\ln x)}{x}\le\dfrac{\pi}{x}$ **(7)**. Επειδή οι συναρτήσεις $\mu(x)=\dfrac{f(\ln x)}{x}$, $\lambda(x)=\dfrac{f(\ln x)}{x}-\dfrac{\pi}{x}$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[1,e^\pi]$, αφού $\lambda(1)=f(\ln 1)-\pi=f(0)-\pi=-\pi\neq 0$ και $\mu(e^\pi)=\dfrac{\pi}{e^\pi}\neq 0$, αν ολοκληρώσουμε την (7) έχουμε:

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\int_1^{e^\pi}\frac{\pi}{x}dx\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\left[\pi\ln x\right]_1^{e^\pi}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi\ln e^\pi\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2.$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2016 ΣΤΟ ΣΥΓΧΡΟΝΟ

- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΙΚΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ, Δ΄** Κύκλος, Μάρτιος 2016.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
ΘΕΜΑ Β σσ. 265, 266 ασκ. 431, 432, 433.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
ΘΕΜΑ Β σσ. 7 ασκ. 20.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
ΘΕΜΑ Β σσ. 12 ασκ. 54.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Γ1 σσ. 221 ασκ. 246, 248.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Γ1 σσ. 12 ασκ. 53(δ).
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Γ1 σσ. 15 ασκ. 68(δ).
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Γ2 σσ. 138 ασκ. 310.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Γ3 σσ. 243 ασκ. 336.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Γ4 σσ. 12 ασκ. 56(δ).
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ1 σσ. 298 ασκ. 54.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ2α σσ. 229 ασκ. 279, 280, 281.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ2β σσ. 223 ασκ. 260.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ2β σσ. 8 ασκ. 31.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ3 σσ. 102 ασκ. 170.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ3 σσ. 152 ασκ. 99.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ4 σσ. 320 ασκ. 134.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλιοτεύχος Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ4 σσ. 321 ασκ. 136, 137.
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ4 σσ. 9 ασκ. 38(γ).
- **Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ΄ Λυκείου Θετικών Σπουδών και Οικονομίας,**
Δ4 σσ. 11 ασκ. 50(δ).