

Μαθηματικά

θετικής & τεχνολογικής κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ: 194

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ: 188

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ: 259

A4.

α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ


σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$|z - 4| = 2|z - 1| \Leftrightarrow$$

$$(z - 4)(\bar{z} - 4) = 4(z - 1)(\bar{z} - 1) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4(z\bar{z} - z - \bar{z} + 1) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 16 = 4z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 \Leftrightarrow$$

$$3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$|z| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z , είναι κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Ενδεικτικές Απαντήσεις

B2. $|z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow z_1 = \frac{4}{\bar{z}_1}$ όμοια $z_2 = \frac{4}{\bar{z}_2}$

α) $\bar{w} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = 2 \frac{\frac{4}{\bar{z}_1}}{\bar{z}_2} + 2 \frac{\frac{4}{\bar{z}_2}}{\bar{z}_1} = 2 \frac{z_2}{z_1} + 2 \frac{z_1}{z_2} = w \Rightarrow w \in \mathbb{R}$

β) $w \in \mathbb{R}$ άρα

$$|w| = 2 \left| \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 2 \left(\left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \right) \leq 4$$

$$|w| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq w \leq 4$$

$w \in \mathbb{R}$


σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ

B3.

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \Rightarrow -4 = \frac{2z_1^2 + 2z_2^2}{z_2 z_1} \Rightarrow 2z_1^2 + 2z_2^2 + 4z_2 \cdot z_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

$$\cdot (AB) = |z_1 - z_2| = |z_1 + z_1| = 2|z_1| = 4$$

$$\cdot (AG) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1 - 2i)| = |z_1| \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\cdot (BG) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1| \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}. \text{ Άρα το τρίγωνο ABΓ ισοσκελές}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \frac{(x-1)^2 e^x}{(x^2+1)^2} \geq 0$ Άρα f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2+1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

DLH DLH

Γ2. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2) \Leftrightarrow$

$$e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{2} = \frac{e^x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^3}{2}.$$

Επειδή το $\frac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f η εξίσωση $f(x) = \frac{e^3}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

και αφού είναι γνησίως μονότονη η ρίζα αυτή είναι μοναδική.


σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ

Γ3.

α' τρόπος

Ισοδύναμα θα δείξουμε για $x > 0$, $\alpha > 0$

$$\int_{2x}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\alpha}^{4x} f(x)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{4x} f(x)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\int_{\alpha}^{4x} f(x)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt}{2x} < f(4x).$$

Θεωρούμε $h(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$, Θ.Μ.Τ. για την h στο $[2x, 4x]$, $x > 0$ οπότε υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$

$$\text{τέτοιο ώστε } h'(\xi) = \frac{h(4x) - h(2x)}{2x} \Leftrightarrow h'(\xi) = \frac{\int_{\alpha}^{4x} f(x)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt}{2x} \quad (1).$$

$h'(x) = f(x)$, $h''(x) = f'(x) > 0$, από το Γ1, οπότε h γνησίως αύξουσα στο $[2x, 4x]$.

$$2x < \xi < 4x \Rightarrow h'(\xi) < h'(4x) \Leftrightarrow \frac{\int_{\alpha}^{4x} f(x)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt}{2x} < f(4x).$$

β' τρόπος

$$\text{Για } 2x \leq t \leq 4x \Rightarrow t \leq 4x \xRightarrow{f \uparrow} f(t) \leq f(4x) \Rightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)dt \Leftrightarrow$$

Ενδεικτικές Απαντήσεις

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \cdot \int_{2x}^{4x} 1dt \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \cdot [t]_{2x}^{4x} \Leftrightarrow$$

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \cdot (4x - 2x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x).$$

* Η συνάρτηση $f(t) - f(4x)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[2x, 4x]$ οπότε:

$$f(t) - f(4x) \leq 0 \Rightarrow \int_{2x}^{4x} (f(t) - f(4x))dt < 0 \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)dt.$$

Γ4.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_{2x}^{4x} f(t)dt + \frac{1}{x} \cdot (4f(4x) - 2f(2x)) \quad (1).$$

Από το Γ3 έχουμε $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \cdot \int_{2x}^{4x} f(t)dt > -\frac{2}{x} \cdot f(4x) \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{x^2} \cdot \int_{2x}^{4x} f(t)dt + \frac{1}{x} \cdot (4f(4x) - 2f(2x)) > -\frac{2}{x} \cdot f(4x) + \frac{1}{x} \cdot (4f(4x) - 2f(2x)) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) > -\frac{2}{x} \cdot f(4x) + \frac{4}{x} \cdot f(4x) - \frac{2}{x} \cdot f(2x) \Leftrightarrow g'(x) > \frac{2}{x} \cdot f(4x) - \frac{2}{x} \cdot f(2x) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) > \frac{2}{x} \cdot (f(4x) - f(2x)) > 0, \text{ αφού } x > 0 \text{ και } 4x > 2x \xRightarrow{f \uparrow} f(4x) > f(2x).$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.


σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)} = 2 - f'(x)e^{-f(x)} \Rightarrow$$

$$(e^{f(x)})' = (2x + e^{-f(x)})' \Rightarrow e^{f(x)} = 2x + e^{-f(x)} + c$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Άρα

$$e^{f(x)} = 2x + e^{-f(x)} \Rightarrow e^{f(x)} = 2x + \frac{1}{e^{f(x)}} \Rightarrow e^{2f(x)} = 2xe^{f(x)} + 1 \Rightarrow e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1 \Rightarrow$$

$$e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \quad (1)$$

$$x^2 + 1 \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ άρα, } (1) \Rightarrow (e^{f(x)} - x)^2 \neq 0 \Rightarrow e^{f(x)} - x \neq 0$$

Η $e^{f(x)} - x$, συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ως σύνθεση συνεχών (η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής) συνεπώς διατηρεί πρόσημο, δηλαδή $e^{f(x)} - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ή $e^{f(x)} - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως $e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$ άρα $e^{f(x)} - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$(1) \Rightarrow (e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad (2)$$

$$\text{Ισχύει } x^2 + 1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > |x| \geq -x \Rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

$$(2) \Rightarrow f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Δ2.

α) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ παραγωγίσιμη για κάθε

$$x \in \mathbb{R} \text{ ως σύνθεση με } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \text{ άρα η } f$$

γνησίως αύξουσα και η f' παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως σύνθεση με

$$f''(x) = \frac{-x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$


σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ άρα η } f \text{ κυρτή για } x \in (-\infty, 0] \text{ και κοίλη για}$$

$x \in [0, +\infty)$. Έχει σημείο καμπής $O(0, f(0))$ δηλαδή το $O(0, 0)$

β) Η εξίσωση εφαπτομένης στο $O(0, 0)$ της C_f είναι:

$$\varepsilon: y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow \varepsilon: y - 0 = (x - 0) \Leftrightarrow \varepsilon: y = x$$

Αφού για $x \geq 0$ η f είναι κοίλη τότε το γράφημα της θα είναι κάτω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Άρα $f(x) \leq x$ για $x \geq 0$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^1 (-f(x) + x) dx = -\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 x dx \quad (1)$$

$$A = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = \int_0^1 (x)' \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx =$$

$$\left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1 \quad (2)$$

Άρα:

$$(1) \xRightarrow{(2)} E = \sqrt{2} - 1 - \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2} = \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ3.

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right]$$

Σ
σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ

Η f είναι γνησίως αύξουσα από **Δ2(α)** με προφανή ρίζα στο $x_0=0$, άρα για $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ άρα:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln f(x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right)}{x} \cdot \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}}$$

Θεωρούμε $F(x) = e^{\int_0^x f^2(t) dt}$, $x \in [0, +\infty)$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Η f συνεχής στο $[0, +\infty)$, η f^2 συνεχής άρα $\int_0^x f^2(t)dt$ παραγωγίσιμη $x \in [0, +\infty)$

Τελικά η F παραγωγίσιμη ως σύνθεση άρα $F'(x) = e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f^2(x)$ και

$$F'(0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(F(x) - F(0))}{x - 0} = 0 \text{ (I)}$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + 1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})} = 0, \text{ (II)} \end{aligned}$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}} = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1})} = 1$$

Τελικά από (I),(II)

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(F(x) - F(0))}{x - 0} \cdot \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}} = 0$$



Δ4.

Θεωρούμε συνάρτηση

$$H(x) = (x - 2) \left[1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt \right] + (x - 3) \left[8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt \right]$$

Η συνάρτηση συνεχής στο $[2, 3]$

$$H(2) = -8 + 3 \int_0^2 f^2(t) dt \text{ και}$$

$$H(3) = 1 - 3 \int_0^1 f(t^2) dt$$

Αφού για $x \geq 0$ η f είναι κοίλη τότε το γράφημα της θα είναι κάτω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα $f(x) \leq x$ για $x \geq 0$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Ενδεικτικές Απαντήσεις

$$f(t^2) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \int_0^1 t^2 dt \Rightarrow \int_0^1 f(t^2) dt < \frac{1}{3} \Rightarrow H(3) > 0$$

$$f(t) \leq t \Rightarrow f^2(t) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t) dt < \int_0^2 t^2 dt \Rightarrow \int_0^2 f(t^2) dt < \frac{8}{3} \Rightarrow H(2) < 0$$

Άρα $H(2) \cdot H(3) < 0$ από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $H(\xi) = 0$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Γ. ΜΠΕΚΟΣ – Ι. ΤΣΑΚΜΑΚΗ – Β. ΓΕΡΩΝΥΜΑΚΗΣ – Δ. ΣΙΔΕΡΗΣ – Γ. ΛΥΓΚΑΣ


σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ
