ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

γενικής παιδείας

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελ: 31

A2. Σχολικό βιβλίο, σελ: 22

A3. Σχολικό βιβλίο, σελ: 87

A4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Ισχύει ότι $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ή $x=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{1}{4}$. Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι K=$\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$. Όμως ισχύει ότι:

$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B\Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)\le P(A\cup B)$. Αν θεωρήσουμε ότι οι παραπάνω πιθανότητες είναι **ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους** και ανήκουν στο παραπάνω σύνολο K, και αφού $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ έχουμε

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4},\ \ P(A)=\frac{1}{3},\ \ P(A\cup B)=\frac{1}{2}.$$

B2.

$$P(A'-B')=P(A'\cap(B')')=P(A'\cap B)=P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\ (1)$$

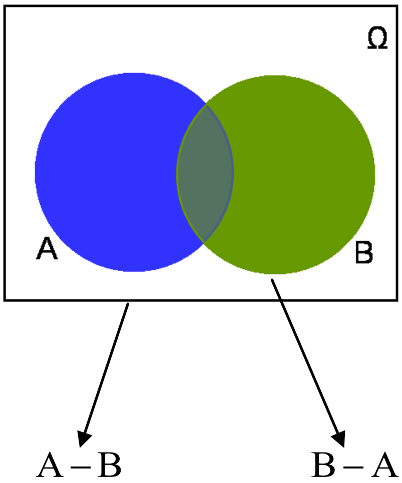
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}\,(2)$$

ΓΛΥΦΑΔΑ: ΑΛΕΚΟΥ ΠΑΝΑΓΟΥΛΗ 52 (απέναντι από το ΤΑΧΥΔΡΟΜΕΙΟ), ΤΗΛ. 210 8941040, 210 8941383
ΕΛΛΗΝΙΚΟ: ΛΕΩΦΟΡΟΣ ΒΟΥΛΙΑΓΜΕΝΗΣ 28 (στάση ΜΕΤΡΟ), ΤΗΛ. 210 9610057, 210 9626656
sygchrono-edu.gr

Άρα $(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} P(A'-B') = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$$P(\Delta) = P\left(A \cap B\right)' = 1 - P\left(A \cap B\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Β3.



Από το διάγραμμα Venn βλέπουμε ότι:

$$\left(A - B\right) \cap \left(B - A\right) = \varnothing$$

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον Απλό Προσθετικό Νόμο.
Έχουμε λοιπόν:

$$P(E) = P\left(\left(A - B\right) \cup \left(B - A\right)\right) = P\left(A - B\right) + P\left(A - B\right) = P\left(A \cup B\right) - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Β4. $\left\{x \in R : 9x^2 - 3x - 2 = 0\right\}$ άρα $P(\Gamma) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ αφού $0 \le P(\Gamma) \le 1$

Έστω τα ενδεχόμενα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα $B \cap \Gamma = \varnothing$

Τότε από απλό προσθετικό νόμο θα ισχύει ότι $P(B \cup \Gamma) = P\left(B\right) + P\left(\Gamma\right) = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$

άτοπο.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%, έχουμε:

$$f_1\% = 10.$$

Αφού το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%, έχουμε $f_5\% = 30$.

Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ισχύει:

$$\alpha_3 = 108^o \Leftrightarrow f_3 \cdot 360^o = 108^o \Leftrightarrow f_3 = 0{,}3 \Leftrightarrow f_3\% = 30$$

Για τη μέση τιμή των παρατηρήσεων ισχύει:

$$\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i f_i = 14 \Leftrightarrow 9 \cdot 0{,}1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0{,}3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0{,}3 = 14 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}9 + 11 \cdot f_2 + 3{,}9 + 15 \cdot f_4 + 5{,}1 = 14 \Leftrightarrow 11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4{,}1 \quad \textbf{(1)}$$

Όμως $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow 0{,}1 + f_2 + 0{,}3 + f_4 + 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f_2 + f_4 = 0{,}3 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}3 - f_4 \quad \textbf{(2)}$$

Η **(1)** με βάση τη **(2)** γίνεται:

$$11 \cdot (0{,}3 - f_4) + 15 \cdot f_4 = 4{,}1 \Leftrightarrow 3{,}3 - 11 \cdot f_4 + 15 \cdot f_4 = 4{,}1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot f_4 = 0{,}8 \Leftrightarrow f_4 = 0{,}2 \Leftrightarrow f_4\% = 20$$

Και από την **(2)**: $f_2 = 0{,}3 - f_4 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}3 - 0{,}2 \Leftrightarrow f_2 = 0{,}1 \Leftrightarrow f_2\% = 10$

Γ2.

x_i	f_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
9	0,1	25	2,5
11	0,1	9	0,9
13	0,3	1	0,3
15	0,2	1	0,2
17	0,3	9	2,7
Σύνολο			6,6

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \nu_i = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = 6{,}6$$

Άρα:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6{,}6} \simeq 2{,}57$$

και

$CV = \frac{s}{\bar{x}} \Leftrightarrow CV = \frac{2,57}{14} \simeq 0,18 > 0,1$. Επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3.

Από τον πίνακα του ερωτήματος **Γ2** έχουμε:

$$x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4 = 0,9 + 1,1 + 3,9 + 3 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f_i = 8,9 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \frac{\nu_i}{\nu} = 8,9 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot \nu_i = 8,9 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu} \cdot 1780 = 8,9 \Leftrightarrow \nu = 200$$

Γ4.

Ισχύει ότι:

$\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_a} \Leftrightarrow \beta_i = \frac{1}{S_a} \cdot \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_a}$ για i=1, 2, 3, 4, 5

Άρα:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{S_a} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_a} = \frac{\bar{\alpha}}{S_a} - \frac{\bar{\alpha}}{S_a} = 0$$

και $S_\beta = \frac{1}{S_a} \cdot S_a = \frac{S_a}{S_a} = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το ορθογώνιο ΑΔΓΒ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με πλευρά ΑΒ=x, η Β γωνία είναι 90^0 συνεπώς βαίνει σε ημικύκλιο, άρα η ΑΓ είναι διάμετρος. Έστω ΒΓ=y , με x>0 ,y>0 . Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ΑΒΓ τρίγωνο.

$\mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2 \Leftrightarrow 10^2 = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \Leftrightarrow \mathrm{y}^2 = 10^2 - \mathrm{x}^2$ (1), με 0<x<10 και αφού y>0, $(1) \Rightarrow \mathrm{y} = \sqrt{100 - \mathrm{x}^2}$ (2). Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι $\mathrm{E} = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{B\Gamma}$ άρα $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x} \cdot \sqrt{100 - \mathrm{x}^2}$ με 0<x<10

Δ2. $f'(x)=\left(x\cdot\sqrt{100-x^2}\right)'=\dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$ με 0<x<10

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}\geq 0 \overset{\sqrt{100-x^2}>0}{\Leftrightarrow} x^2\leq 50 \Leftrightarrow -5\sqrt{2}\leq x\leq 5\sqrt{2} \text{ και } 0<x<10$$

	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘

Άρα η f έχει μέγιστο στο $x_0=5\sqrt{2}$ από το πίνακα μονοτονίας της f. Για $x=5\sqrt{2}$, $(2)\Rightarrow y=5\sqrt{2}$

Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

Δ3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}-\sqrt{99}}{98x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2\left[100-(1+x)^2\right]-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x+x^2)(100-1-2x-x^2)-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{99-2x+x^2+198x-4x^2+2x^3+99x^2-2x^3+x^4-99}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^3+96x+196)}{98x\left[(1+x)\sqrt{100-(1+x)^2}+\sqrt{99}\right]}=\frac{196}{98\cdot 2\sqrt{99}}=\frac{1}{\sqrt{99}}=\frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ4.

$$A-B\subseteq A\Rightarrow P(A-B)\leq P(A)$$

Επειδή:

$0<P(A-B)\leq P(A)\leq 1<5\sqrt{2}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,5\sqrt{2}\right]$, έχουμε:

$$f\left(P(A-B)\right)\leq f\left(P(A)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)}\leq P(A)\sqrt{100-P^2(A)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\leq\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$$

Επίσης: $0 < \mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \leq 1 \Leftrightarrow \mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \leq 1 \Leftrightarrow -\mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \geq -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B}) \geq 99 \Leftrightarrow \sqrt{100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})} \geq \sqrt{99} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{99}} < 1$ και επειδή $0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq 1$, έχουμε ότι:

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\sqrt{100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})}} < 1$$

Άρα:

$0 < \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sqrt{100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A})}} \leq \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\sqrt{100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})}} < 1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, 5\sqrt{2}\right]$, έχουμε:

$$f\left(\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\sqrt{100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A})}}\right) \leq f\left(\frac{\mathrm{P}(\mathrm{A})}{\sqrt{100-\mathrm{P}^2(\mathrm{A}-\mathrm{B})}}\right)$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Β. ΓΕΡΩΝΥΜΑΚΗΣ – Ι. ΤΣΑΚΜΑΚΗ – Γ. ΜΠΕΚΟΣ – Δ. ΣΙΔΕΡΗΣ

σύγχρονο
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΥΜΝΑΣΙΟ - ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ - ΕΠΑ.Λ