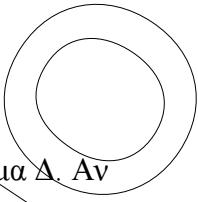
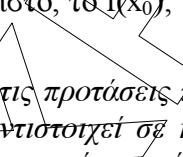
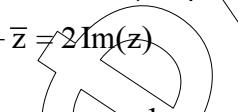
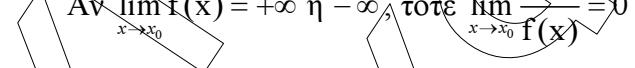
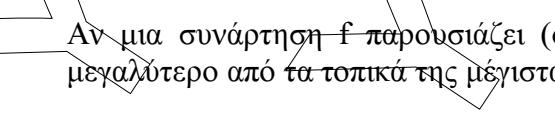
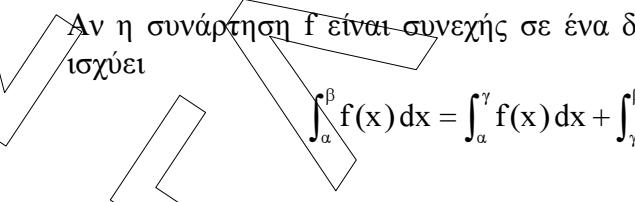
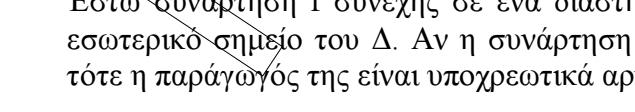


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
- τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
- 
- Mονάδες 8**
- A2.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κούλη στο Δ ;
- 
- Mονάδες 4**
- A3.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$,
- 
- Mονάδες 3**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- a)** Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(z)$ (μονάδες 2)
- 
- β)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ (μονάδες 2)
- 
- γ)** Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα. (μονάδες 2)
- 
- δ)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ (μονάδες 2)
- 
- ε)** Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγος της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ . (μονάδες 2)
- 
- Mονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, z \in \mathbb{C}$$

- B1.** Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

- B2.** Αν $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

- B3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος B2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

- Γ1.** Να μελετήσετε την h ως προετοιμασία για την κυρτότητα.

Μονάδες 5

- Γ2.** Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

- Γ3.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτη της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

- Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα x' και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

- Δ2.** Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

- a) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u) du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x = 0$

- b) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t = 0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετυμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλασιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

- Δ3.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2, \quad x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7