

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Θετικής-Τεχνολογικής κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ Α

A1. σχ. Βιβλίο, σελ. 251

A2. σχ. Βιβλίο, σελ. 273

A3. σχ. Βιβλίο, σελ. 150

A4.

1. Λάθος

2. Σωστό

3. Σωστό

4. Σωστό

5. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0 \xRightarrow{z=x+yi} 2(x^2 + y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Άρα $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$.

B2.

$$\text{Έχουμε ότι: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\text{Άρα } w = 3 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{39} = 3i^{39} = -3i.$$



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Ενδεικτικές Απαντήσεις

B3. Για τον u ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i|. \text{ Έτσι έχουμε}$$

$|u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = 5$. Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} > 0$, $h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$, οπότε η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ2. $h(x) = \ln e^x - \ln(e^x + 1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$.

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow e^x + 1 > 2 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$



Γ3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$, όπου

$u = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$. Η $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x} \right) = 1 - 0 = 1, \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 1) \stackrel{\omega = e^x + 1}{=} \lim_{\omega \rightarrow 1} \ln \omega = 0. \text{ Άρα } \lambda = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln(e^x + 1) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(e^x + 1)) = \ln 1 = 0$, οπότε $\beta = 0$. Η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Γ4. $\varphi(x) = e^x (h(x) + \ln 2) = e^x \cdot \ln \frac{2e^x}{e^x + 1}.$

$\varphi(0) = 0$. Για $2e^x > e^x + 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, οπότε $\frac{2e^x}{e^x + 1} > 1 \Leftrightarrow \ln \frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$. Άρα

$\varphi(x) > 0$, για $x > 0$ και ομοίως $\varphi(x) < 0$, για $x < 0$. Το 0 μοναδική ρίζα.

Είναι $\varphi(x) \geq 0$ στο $[0, 1]$.

$$E = \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 e^x (x - \ln(e^x + 1) + \ln 2) dx = \int_0^1 x e^x dx - \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx + \ln 2 \cdot \int_0^1 e^x dx \quad (1).$$

• $\int_0^1 x e^x dx = 1$, με παραγοντική ολοκλήρωση.

• $\int_0^1 e^x \cdot \ln(e^x + 1) dx \stackrel{\substack{u=e^x+1 \\ du=e^x dx \\ u_1=2 \\ u_2=e+1}}{=} \int_2^{e+1} \ln u du = [u \ln u - u]_2^{e+1} = (e+1) \ln(e+1) - (e+1) - 2 \ln 2 + 2.$

• $\int_0^1 e^x dx = e - 1.$

Από (1) $\Rightarrow E = e + e \ln 2 + \ln 2 - (e+1) \cdot \ln(e+1)$ τετραγωνικές μονάδες.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} 1 = f(0)$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων στο

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \text{ με } f'(x) = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2}$$

Θέτουμε συνάρτηση $h(x) = e^x x - e^x + 1$. $Dh = \mathbb{R}$

παραγωγίσιμη με $h'(x) = e^x x$.

Για $x > 0$, $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα άρα για

$$x > 0 \stackrel{h \uparrow}{\Rightarrow} h(x) > 0.$$



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Για $x < 0$, $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ γνησίως φθίνουσα, άρα $x < 0 \xRightarrow{h\downarrow} h(x) > 0$.

Τελικά $f'(x) > 0$ για $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού συνεχής στο $x_0=0$.

$$\Delta 2. \alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Άρα } f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Το } 0 \text{ προφανής λύση αφού } \int_1^{2f'(0)} f(u) du = \int_1^1 f(u) du = 0.$$

f κυρτή οπότε f' γνησίως αύξουσα.

Είναι για $x > 0 \xRightarrow{f\uparrow} f(x) > f(0) = 1 > 0$ και

$$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2f'(x) > 1, \text{ οπότε } \int_1^{2f'(x)} f(u) du > 0, \text{ για } x > 0.$$

$$x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2f'(x) < 1, \text{ οπότε}$$

$$\int_{2f'(x)}^1 f(u) du > 0 \Leftrightarrow - \int_1^{2f'(x)} f(u) du > 0 \Leftrightarrow \int_1^{2f'(x)} f(u) du < 0, \text{ για } x < 0.$$

Το 0 επομένως μοναδική ρίζα.

$$\beta) y(t) = \frac{e^{x(t)} - 1}{x(t)}, y'(t) = \frac{x'(t) [x(t) \cdot e^{x(t)} - e^{x(t)} + 1]}{x^2(t)}, \text{ για } x(t) \neq 0$$

$$x'(t) = 2y'(t) \Leftrightarrow x^2(t) - 2e^{x(t)} \cdot x(t) + 2e^{x(t)} - 2 = 0 \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 - 2xe^x + 2e^x - 2, x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(0) = 0, \varphi'(x) = 2x(1 - e^x), \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Είναι } \varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ και}$$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Το $\varphi(0) = 0$ μέγιστο οπότε η $x = 0$ μοναδική ρίζα. Δηλαδή από την (1) έχουμε $x(t_0) = 0$. Άρα $y(t_0) = 1$. Το ζητούμενο σημείο είναι $M(0,1)$.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Δ3. $g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 (x - 2)^2$. $Dg = (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με $g'(x) = 2(e^x - e)(x - 2)(e^x x - e^x - e) = 2(e^x - e)(x - 2) \cdot k(x)$.

Όπου $k(x) = e^x x - e^x - e$ παραγωγίσιμη με $k'(x) = e^x x > 0$ για όλα $x \in (0, +\infty)$ άρα η k γνησίως αύξουσα για $x \in (0, +\infty)$. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1, 2]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (1, 2)$ ώστε $k(\rho) = 0$ το οποίο μοναδικό από μονοτονία στο $(0, +\infty)$. Για $x > \rho \xRightarrow{k \uparrow} k(x) > 0$ και $0 < x < \rho \xRightarrow{k \uparrow} k(x) < 0$

Άρα ο πίνακας πρόσημου της g' είναι

x	0	1	ρ	2	$+\infty$		
$\chi - 2$	—	—	—	0	+		
$e^x - e$	—	0	+	+	+		
$k(x)$	—	—	0	+	+		
$g'(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στα $(0, 1]$, $[\rho, 2]$ και γνησίως αύξουσα στα $[1, \rho]$ και $[2, +\infty)$. Επίσης παρουσιάζει δύο τοπικά ελάχιστα στις θέσεις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ και ένα τοπικό μέγιστο στη θέση $x_3 = \rho$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΓΕΡΩΝΥΜΑΚΗΣ Β. – ΛΥΓΚΑΣ Γ. – ΜΠΕΚΟΣ Γ. – ΣΙΔΕΡΗΣ Δ. – Ι. ΤΣΑΚΜΑΚΗ
