ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μαθηματικά

κατεύθυνσης

σύγχρονο
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ- ΘΕΤΙΚΗ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΕΠΑ.Λ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ: 334 – 335

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ: 246

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ: 222

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

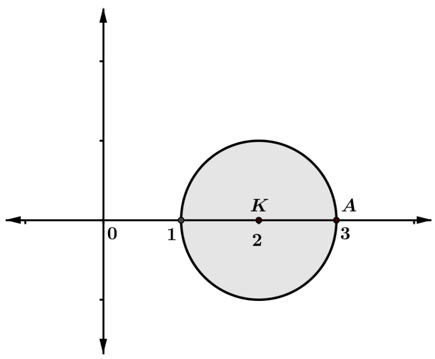
Β1.

$|z-2|^2+|z-2|-2=0$, $\Delta=9$,

$|z-2|=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}-2 & \text{απορρίπτεται}\\ 1\end{cases}$

Άρα $|z-2|=1$, κύκλος με K (2, 0), $\rho=1$

$|z|_{max}=OA=3$, άρα $|z|\le 3$



Β2.

$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1=x+yi \\ z_2=\bar{z}_1=x-yi\end{pmatrix}$

$|y-(-y)|=2 \Leftrightarrow |y|=1$, άρα $|z-2|=1 \Leftrightarrow |x-2+i|=1 \Leftrightarrow (x-2)^2+1=1 \Leftrightarrow x=2$

$z_1=2+i$, $z_2=2-i$

$z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$

$z_1\cdot z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5$

Β3.

Α΄ τρόπος:

Έστω $|\nu| \geq 4$

$\nu^3 + \alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0 = 0$

$\nu^3 = -\alpha_2\nu^2 - \alpha_1\nu - \alpha_0$

(1) $|\nu|^3 = |\alpha_2\nu^2 + \alpha_1\nu + \alpha_0| \leq |\alpha_2||\nu|^2 + |\alpha_1||\nu| + |\alpha_0|$ όμως

$1 \leq |\alpha_0| \leq 3$

$|\nu| \leq |\alpha_1||\nu| \leq 3|\nu|$

$|\nu|^2 \leq |\alpha_2||\nu|^2 \leq 3|\nu|^2$

άρα $|\nu|^3 \leq 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3$ **(Ι)** $\Leftrightarrow |\nu|^3 \leq 3\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right) \Leftrightarrow |\nu|^3 \leq 3\dfrac{\left(|\nu|^3 - 1\right)}{|\nu| - 1} \Leftrightarrow$

(γιατί $|\nu| - 1 > 0$ υπόθεση $|\nu| \geq 4$)

$|\nu|^4 - |\nu|^3 \leq 3|\nu|^3 - 3 \Leftrightarrow |\nu|^4 \leq 4|\nu|^3 - 3 \Leftrightarrow$ όμως $4|\nu|^3 - 3 < 4|\nu|^3$

$|\nu|^4 - 4|\nu|^3 < 0 \Leftrightarrow |\nu| < 4$ άτοπο

Β΄ τρόπος:

(Ι) $\Rightarrow |\nu|^3 \leq 3|\nu|^2 + 3|\nu| + 3 \Leftrightarrow |\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 3 \leq 0 \Leftrightarrow |\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 3 - 1 \leq -1$

Άρα $|\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 3 - 1 \leq -1 < 0 \Rightarrow |\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 3 - 1 < 0 \Rightarrow |\nu|^3 - 3|\nu|^2 - 3|\nu| - 4 < 0$

$\Rightarrow \left(|\nu| - 4\right)\left(|\nu|^2 + |\nu| + 1\right) < 0 \Rightarrow |\nu| - 4 < 0 \Rightarrow |\nu| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$\left(f(x) + x\right)\left(f'(x) + 1\right) = x \Leftrightarrow 2\left(f(x) + x\right)\left(f(x) + x\right)' = 2x \Leftrightarrow \left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + c,$

Για x=0 $\Rightarrow f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + 1$ **(1)**

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = f(x) + x$ επομένως από (1) αφού $x^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και h συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επίσης $h(0) = f(0) = 1 > 0$ άρα $h(x) = f(x) + x > 0$. Τελικά από την (1), $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

Γ2.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $f'(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$

• $f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}<0 \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2+1}<0 \Leftrightarrow x<\sqrt{x^2+1}$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ γιατί $x^2<x^2+1 \Leftrightarrow |x|<\left(\sqrt{x^2+1}\right) \Leftrightarrow x^2<x^2+1 \Leftrightarrow 0<1$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως θα είναι 1-1. Τελικά $f(g(x))=1 \Leftrightarrow f(g(x))=f(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-2=0$

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0 $-$	0 $+$	
$h(x)$	↗	↘	↗	

$h(x)=2x^3+3x^2-2$, με $h'(x)=6x^2+6x=6x(x+1)$

$h((-\infty,-1])\overset{h\uparrow}{=}(-\infty,-1]$, $h((-1,0])\overset{h\searrow}{=}[-2,-1)$

και $h((0,+\infty))\overset{h\nearrow}{=}(-2,+\infty)$.

Το $0\in h((0,+\infty))\overset{h\nearrow}{=}(-2,+\infty)$ άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της h άρα και της g.

Γ3.

Α΄ τρόπος:

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\cdot \eta\mu x$ η f συνεχής στο R, άρα παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$h'(x)=\left(\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\cdot\eta\mu x\right)'=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, αφού $h(0)=0$, $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ άρα υπάρχει τουλάχιστον $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_o)=0 \Leftrightarrow f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\eta\mu x_0+\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$$

Β΄ τρόπος:

θ. Bolzano στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ για την $h(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x+\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{h}\right]=$$

$$\lim_{h\to0}\left[\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}\right]\underset{\omega=-h}{\overset{u=5h}{=}}\lim_{u\to0}\left[\frac{f(1+u)-f(1)}{u}\cdot5\right]-\lim_{\omega\to0}\left[\frac{f(1+\omega)-(f(1))}{-\omega}\right]=$$

$$=5f'(1)+f'(1)=6f'(1)\Rightarrow 6f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$$

$0\prec x\prec1\Rightarrow f'(x)\prec f'(1)=0\Rightarrow f\downarrow$ στο $(0,1]$

$x\succ1\Rightarrow f'(x)\succ f'(1)=0\Rightarrow f\uparrow$ στο $[1,+\infty)$ ελάχιστο στο 1.

Δ2.

Αφού $f(1)\min\Rightarrow f(x)\ge1,\ x\in(0,+\infty)$

$g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0$, για $x\in(1,+\infty)$

Άρα $g\uparrow$ στο $(1,+\infty)$.

Θεωρούμε $\phi(x)=\int_x^{x+1}g(u)du$, με $x\in(1,+\infty)$ παραγωγίσιμη με $\phi'(x)=g(x+1)-g(x)\succ0$ αφού

$x+1>x\overset{g\uparrow}{\Rightarrow}g(x+1)>g(x)$ άρα $\phi\uparrow$. Η ανίσωση για $x=0$ είναι αδύνατη.

Ισοδύναμα η ανίσωση που δίνεται γίνεται:

$$\phi(8x^2+5)\succ\phi(2x^4+5)\overset{\phi\uparrow}{\Leftrightarrow}8x^2+5\succ2x^4+5\Leftrightarrow8x^2-2x^4>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2x^2(4-x^2)>\overset{x^2>0}{\Leftrightarrow}(2-x)\cdot(2+x)>0\Leftrightarrow-2<x<2\text{ με }x\neq0$$

Δ3.

$$g''(x)=\frac{f'(x)\cdot(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}\quad\textbf{(1)}$$

Θ.Μ.Τ. για f στο [1, x] υπάρχει ξ∈ (1, x) ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

$$1<\xi<x\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow\frac{f(x)-1}{x-1}<f'(x)\overset{x-1>0}{\Leftrightarrow}f(x)-1<f'(x)\cdot(x-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot(x-1)-(f(x)-1)>0.$$

$(1)\Rightarrow g''(x)>0\Rightarrow g$ κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Α΄ τρόπος:

Προφανής λύση το x = α. Η εξίσωση γράφεται:

$$g(x)=\frac{(f(\alpha)-1)(x-\alpha)}{\alpha-1},\ \alpha>1$$

Εξίσωση εφαπτομένης στο x = α της C_g

$$y-g(\alpha)=g'(\alpha)\cdot(x-\alpha)\Leftrightarrow y=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha).$$

Αφού g κυρτή είναι $g(x)\geq y\Leftrightarrow g(x)\geq\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)$ με το ίσον να ισχύει μόνο στο σημείο επαφής στο x = α δηλαδή g(α) = α. Άρα το α είναι μοναδικό.

Β΄ τρόπος:

Θεωρούμε συνάρτηση $k(x)=(\alpha-1)g(x)-(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$ με $x\in(1,+\infty)$

$k'(x)=(\alpha-1)g'(x)-(f(\alpha)-1)$ με $k'(\alpha)=0$, $k''(x)=(\alpha-1)g''(x)>0$.

Άρα $k''(x)>0\Rightarrow k'(x)\uparrow\Rightarrow$ για $x>\alpha\overset{k'\uparrow}{\Rightarrow}k'(x)>0\Rightarrow k\uparrow$, $x<\alpha\overset{k'\uparrow}{\Rightarrow}k'(x)<0\Rightarrow k\searrow$.

Τελικά:

για $x>\alpha\overset{k\uparrow}{\Rightarrow}k(x)>0$, για $x<\alpha\overset{k\downarrow}{\Rightarrow}k(x)<0$ άρα μοναδική ρίζα x = α

Επιμέλεια: Μπέκος Γ., Σιδέρης Δ., Τσακμάκη Ι., Γερωνυμάκης Β.

ΣΧΟΛΙΟ

- ✓ Θεωρούμε ότι τα Θέματα ήταν τα δυσκολότερα από το 1999 μέχρι σήμερα. Απαιτούσαν εξειδικευμένες τεχνικές και γνώσεις, κάλυπταν μεγάλο μέρος της ύλης και δεν ήταν διαβαθμισμένης δυσκολίας (όπως το ερώτημα **Β3** του δεύτερου θέματος).
- ✓ Υπήρξε αιφνιδιασμός για το Β′ Θέμα γιατί ήταν πολύ πιο δύσκολο από τα δεύτερα θέματα των τελευταίων ετών, με επίπτωση την αρνητική επίδραση στην ψυχολογία του υποψηφίου.
- ✓ Πρβ. **ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Μαθηματικά Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης,** ***σελίδα 283, άσκηση 16.γ)*** ---> **Θέμα Γ1** των Πανελλήνιων Εξετάσεων.
- ✓ Πρβ. **ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Μαθηματικά Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης,** ***σελίδα 234, ασκήσεις 302, 304*** ---> **Θέμα Γ2** των Πανελλήνιων Εξετάσεων.
- ✓ Πρβ. **ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Μαθηματικά Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης,** ***σελίδα 166, άσκηση 30*** ---> **Θέμα Δ1** των Πανελλήνιων Εξετάσεων.
- ✓ Πρβ. **ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Μαθηματικά Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης,** ***σελίδα 246, άσκηση 361*** ---> **Θέμα Δ3** των Πανελλήνιων Εξετάσεων.
- ✓ Πρβ. **ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ′ Λυκείου 2012 – 2013, Μαθηματικά Θετικής - Τεχνολογικής Κατεύθυνσης,** ***σελίδα 12, άσκηση 72*** ---> **Θέμα Δ3** των πανελλήνιων εξετάσεων.