

Μαθηματικά

ΕΠΛΛ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ 234

Α2.

- α) Σωστό
 β) Σωστό
 γ) Λάθος
 δ) Λάθος
 ε) Σωστό

Α3.

$$\alpha) \int_a^\beta \eta \mu x dx = [-\sigma \nu x]_a^\beta = -\sigma \nu \beta + \sigma \nu \alpha$$

$$\beta) (c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$\gamma) (x^a)' = a \cdot x^{a-1} \text{ με } a \in \mathbb{R}^* \text{ και } x > 0$$

Σ σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΓΕΩΡΓΙΚΗ-ΘΕΤΙΚΗ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΕΠ.Λ.

ΘΕΜΑ Β

$$B1. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a^2 x + \ln x) = a^2 + \ln 1 = a^2$$

$$B2. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - x)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x(\sqrt{x+3} + 2) = 4$$

$$B3. \text{ Για να είναι συνεχής στο } x_0=1, \text{ θα πρέπει } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \text{ άρα } a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$\text{Το } v = 25 + 17 + 6 + 2 = 50$$

Και με χρήση του τύπου $f_i = \frac{v_i}{v}$ συμπληρώνεται ο παρακάτω πίνακας.

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μισθός (εκατοντάδες ευρώ) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	50	100	450

Γ2. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{450}{50} = 9$

Γ3. Το πολύ 1000 ευρώ έχουν $f_1\% + f_2\% = (50 + 34)\% = 84\%$

Γ4.

Μισθός (εκατοντάδες ευρώ) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
6	25	50	-3	9	225
10	17	34	1	1	170
15	6	12	6	36	216
20	2	4	11	121	242
Σύνολα	50	100			700

Άρα, $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{700}{50} = 14$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = (x-2)^2(x+a)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με:

$$f'(x) = [(x-2)^2]'(x+a) + (x-2)^2(x+a)' = 2(x-2)(x+a) + (x-2)^2 = (x-2)[2(x+a) + (x-2)]$$

$$= (x-2)(3x+2a-2)$$

Δ2. Αφού η f έχει ακρότατο στο $x_0=4$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό από θεώρημα Fermat έχουμε $f'(4) = 0 \Leftrightarrow (4-2)(3 \cdot 4 + 2a - 2) = 0 \Leftrightarrow a = -5$

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Δ3. Για $\alpha=-5$ έχουμε $f(x)=(x-2)^2(x-5)$ και $f'(x)=(x-2)(3x-12)$. Άρα για να βρούμε τη μονοτονία έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-12) = 0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=4$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x-12) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$$

Έτσι ο πίνακας μονοτονίας είναι:

	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗



Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 2]$, $[4, +\infty)$ και είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, 4]$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=4$, το $f(4)=-4$ και τοπικό μέγιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=0$

Δ4. Έχουμε ότι $g(x)=3x^2-12$ με $D_g=R$ και $h(x)=6x-24$ με $D_h=R$

$$\bullet g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 6x + 24 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4$$

$$\bullet g(x) - h(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x - 6x + 24 > 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 8) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty) \quad (1)$$

Το εμβαδό του χωρίου $\Omega = \{C_h, C_g\}$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_2^4 |g(x) - h(x)| dx = \int_2^4 |3x^2 - 18x + 24| dx \stackrel{(1)}{=} \int_2^4 (3x^2 - 18x + 24) dx = \int_2^4 (3x^2 - 18x + 24) dx =$$

$$= 3 \int_2^4 x^2 dx - 18 \int_2^4 x dx + 24 \int_2^4 1 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 - 18 \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^4 + 24 [x]_2^4 = (2^3 - 4^3) - 9(2^2 - 4^2) + 24(2 - 4) = 4\tau. \mu.$$

Επιμέλεια: Ι. Τσακμάκη

ΣΧΟΛΙΟ

Τα θέματα καλύπτουν όλο το εύρος της εξεταστέας ύλης, χωρίς καμία ιδιαίτερη δυσκολία.

✓ Πρβ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, Βιβλίο Επανάληψης Γ' Λυκείου 2012 - 2013, σελ. 17 - 25.

✓ Πρβ. Επαναληπτικά Διαγωνίσματα Γ' Κύκλος, Γ' Λυκείου 2012 - 2013, Θέμα Δ αντίστοιχο με Θέμα Δ των Πανελληνίων.