ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

γενικής παιδείας

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ 14

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 87

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

Θέμα Β

Β1. $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^2-1^2}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Άρα $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{(x)'}{3}\ln x + \frac{x}{3}(\ln x)' = \frac{\ln x}{3} + \frac{1}{3}$. Άρα ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x = 1$ είναι: $f'(1) = \frac{\ln 1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Άρα $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Β2. Έχουμε $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$. Ισχύει επίσης $\{\omega_3\} \subseteq A' \subseteq \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

Άρα $P(\omega_3) \le P(A') \le P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_3) \le P(A') \le 1 - P(\omega_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \le P(A') \le 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \le P(A') \le \frac{3}{4}$

Β3. $P(A')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow 1-P(A)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(\omega_1)+P(\omega_4)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \frac{1}{4}+P(\omega_4)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(\omega_4)=0$

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1\Leftrightarrow \frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+0=1\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{12-3-4}{12}\Leftrightarrow \Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{5}{12}$

Επειδή $\mathrm{A}-\mathrm{B}=\{\omega_4\}$ και $\mathrm{B}-\mathrm{A}=\{\omega_3\}$ έχουμε ότι: $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\{\omega_3,\omega_4\}$

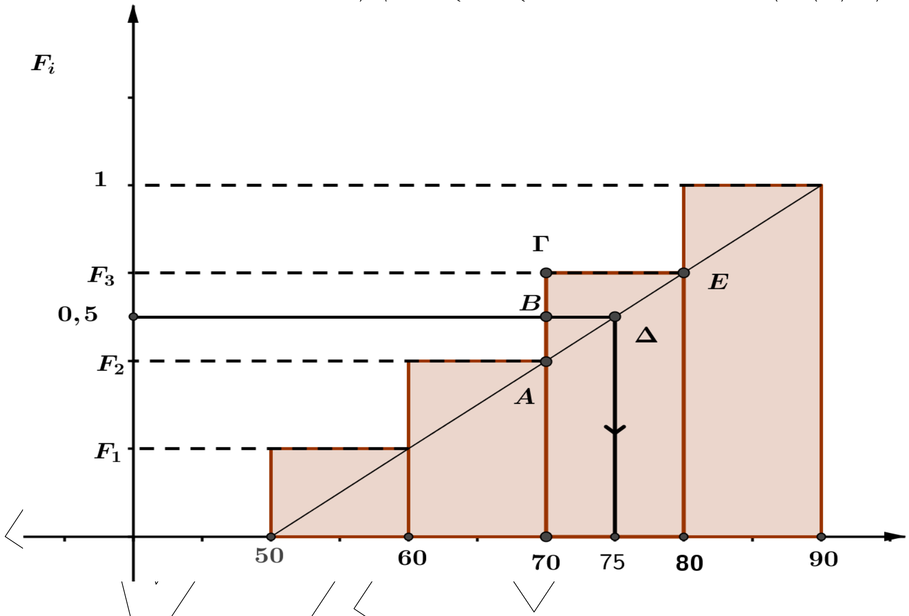
Επομένως: $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

Επειδή $\mathrm{A}'=\{\omega_2,\omega_3\}$ και $\mathrm{B}'=\{\omega_2,\omega_4\}$ έχουμε ότι: $\mathrm{A}'-\mathrm{B}'=\{\omega_3\}$ άρα $P(\mathrm{A}'-\mathrm{B}')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

Θέμα Γ

Γ1. Αν c το πλάτος κάθε κλάσης, η τέταρτη κλάση είναι $[50+3c,50+4c)$. Άρα $\frac{50+3c+50+4c}{2}=85\Leftrightarrow 100+7c=170\Leftrightarrow 7c=70\Leftrightarrow c=10$

Γ2. Κατασκευάζουμε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων:



Αφού $\delta=75$ έχουμε:

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ορθογώνια και έχουν κοινή γωνία την $\hat{A}$. Άρα είναι όμοια και ισχύει:

$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Delta}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma E}}\Leftrightarrow \frac{0,5-F_2}{5}=\frac{F_3-F_2}{10}\Leftrightarrow 5-10F_2=5F_3-5F_2\Leftrightarrow 1=F_3+F_2\Leftrightarrow f_1+f_2+f_1+f_2+f_3=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f_1+2f_2+f_3=1$ (1). Επίσης $f_1+f_2+f_3+f_4=1\overset{f_4=2f_3}{\Leftrightarrow} f_1+f_2+3f_3=1$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας τη (2) επί -2 και προσθέτοντας στην (1) έχουμε: $-5f_3=-1\Leftrightarrow f_3=\frac{1}{5}$, οπότε και $f_4=\frac{2}{5}$

Και η (2) γίνεται: $f_1 + f_2 + \frac{3}{5} = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = \frac{2}{5}$ (3)

Έχουμε ακόμα: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i f_i \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 55f_1 + 65\left(\frac{2}{5} - f_1\right) + 75 \cdot \frac{1}{5} + 85 \cdot \frac{2}{5} = 74 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 55f_1 + 26 - 65f_1 + 15 + 34 = 74 \Leftrightarrow -10f_1 = -1 \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{10}$. Και από την (3) έχουμε $f_2 = \frac{2}{5} - \frac{1}{10} \Leftrightarrow f_2 = \frac{3}{10}$

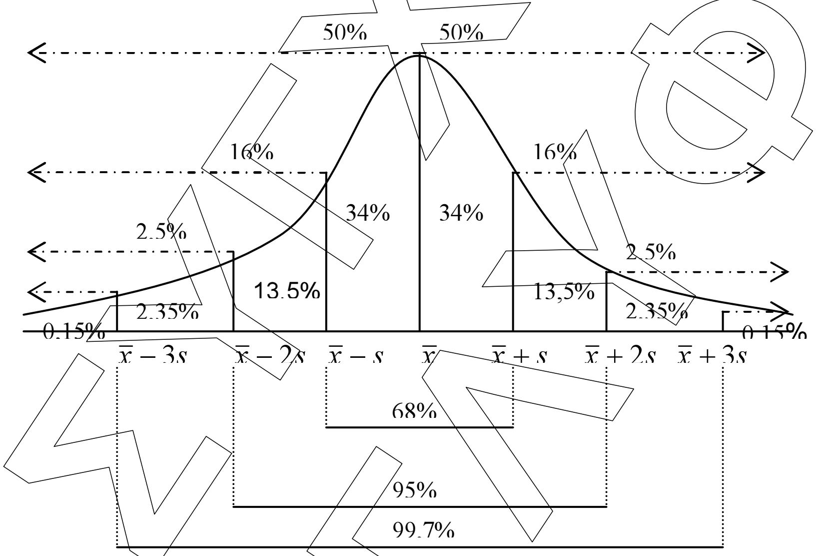
Τελικά λοιπόν έχουμε: $f_1 = 0{,}1$, $f_2 = 0{,}3$, $f_3 = 0{,}2$, $f_4 = 0{,}4$

Και ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Σχετική Συχνότητα** f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολα		**1**

Γ3. $\bar{x} = \frac{55v_1 + 65v_2 + 75v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{55 \cdot 0{,}1v + 65 \cdot 0{,}3v + 75 \cdot 0{,}2v}{0{,}1v + 0{,}3v + 0{,}2v} = \frac{40v}{0{,}6v} = \frac{200}{3}$

Γ4. Αφού το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή



θα πρέπει: $\bar{x} + 2s = 74$ (1) και $\bar{x} - s = 68$ (2). Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε: $3s = 6 \Leftrightarrow s = 2$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $\bar{x} - 2 = 68 \Leftrightarrow \bar{x} = 70$.

Επίσης $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$

άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

Σ σύγχρονο
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ- ΘΕΤΙΚΗ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΕΠΑ.Λ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Θέμα Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\ln x+1$.

Έχουμε $f'(1)=1$ και $f(1)=\kappa$. Η ζητούμενη λοιπόν εφαπτομένη είναι η

(ε): $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\kappa=x-1\Leftrightarrow y=x+\kappa-1$ (1)

Για $x=0$ η (1) γίνεται $y=\kappa-1$. Σημείο τομής λοιπόν της (ε) με τον άξονα y΄y είναι το Α(0, κ – 1).

Για $y=0$ η (1) γίνεται $x=1-\kappa$. Σημείο τομής λοιπόν της (ε) με τον άξονα x΄x είναι το Β(1 – κ, 0).

Για το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ έχουμε:

$E<2\Leftrightarrow \dfrac{|\kappa-1|\cdot|1-\kappa|}{2}<2\Leftrightarrow |\kappa-1|^2<4\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\Leftrightarrow -2<\kappa-1<2\Leftrightarrow -1<\kappa<3$. Όμως ο κ είναι ακέραιος αριθμός και $\kappa>1$. Επομένως $\kappa=2$.

Δ2. **α)** Για τις τεταγμένες των σημείων ισχύει $y_i=x_i+1$, $i=1,2,\ldots,50$. Άρα $\overline{y}=\overline{x}+1\Leftrightarrow 31=\overline{x}+1\Leftrightarrow \overline{x}=30$

β) $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{50}x_i}{50}\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50}x_i=\overline{x}\cdot 50\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50}x_i=30\cdot 50\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50}x_i=1500$

Η νέα μέση τιμή είναι: $\overline{x}'=\dfrac{\sum_{i=1}^{50}x_i+3\cdot 20-15\lambda}{50}\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50}x_i+60-15\lambda=50\cdot 31\Leftrightarrow 1500+60-15\lambda=1550\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -15\lambda=1550-1500-60\Leftrightarrow -15\lambda=-10\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{10}{15}\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{2}{3}$

Δ3. $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$. Ο πίνακας μονοτονίας είναι

	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

$f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}+2$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\dfrac{1}{e}$, το $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}+2>0$

Άρα

$\dfrac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$f\left(\dfrac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0<-\dfrac{1}{e}+2<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)\overset{f'\left(\frac{1}{e}\right)=0}{\Leftrightarrow}$

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Άρα: $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) \Leftrightarrow R = e\ln e + 2 - 0 \Leftrightarrow R = e + 2$ και η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{f'\left(\frac{1}{e}\right) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e)}{5} =$$

$$= \frac{0 + \alpha\ln\alpha + 2 + \beta\ln\beta + 2 + \gamma\ln\gamma + 2 + e\ln e + 2}{5} = \frac{\ln\alpha^{\alpha} + \ln\beta^{\beta} + \ln\gamma^{\gamma} + e + 8}{5} =$$

$$= \frac{\ln\left(\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma}\right) + e + 8}{5} = \frac{\ln e^{7} + e + 8}{5} = \frac{7 + e + 8}{5} = \frac{e + 15}{5} = 3 + \frac{e}{5}$$

Δ4. α) Θα πρέπει $f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$. Άρα, $A = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{30}\}$ και αφού έχουμε ισοπίθανα ενδεχόμενα ισχύει $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

β) Επίσης $f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t + 2 > \ln t + 2 \Leftrightarrow t\ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0$

t	0		1		$+\infty$
$t-1$		$-$	0	$+$	
$\ln t$		$-$	0	$+$	
$(t-1)\ln t$		$+$		$+$	

Άρα $t \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, επομένως $B = \{t_1, t_2, \ldots, t_{29}\}$. Άρα $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{29}\}$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$$

Επιμέλεια: Β. Γερωνυμάκης - Ι. Τσακμάκη – Δ. Σιδέρης – Γ. Μπέκος

ΣΧΟΛΙΟ

✓ Τα θέματα ήταν απαιτητικά για πολύ καλά προετοιμασμένους μαθητές. Ιδιαίτερες δυσκολίες παρουσιάστηκαν στα ερωτήματα Γ2, Γ3 και Θέμα Δ, χρειάζονταν ικανότητα συνδυαστικής σκέψης, ταχύτητας και συνολικής θεώρησης της ύλης.