

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'**  
**28 ΜΑΪΟΥ 2012**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- A2.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$ :
- A3.** Έστω συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  τοπικό μέγιστο;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- a) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό ίσονα.
  - b) Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο  $y$  του συνόλου τιμών της η εξίσωση  $f(x) = y$  έχει ακριβώς μία λύση ως προς  $x$ .
  - c) Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .
  - d)  $(\sigma x)' = \frac{1}{\eta \mu x}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta \mu x = 0\}$
  - e)  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$ , όπου  $f'$ ,  $g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, b]$

**Μονάδες 7**

**Μονάδες 4**

**Μονάδες 4**

**Μονάδες 4**

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  και  $w$  για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 4 \quad (1)$$

$$|w - 5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

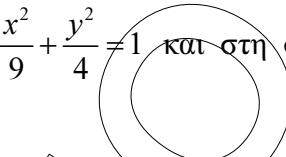
- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών  $z$  στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 1$

**Μονάδες 6**

- B2.** Αν  $z_1, z_2$  είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς  $z$  με  $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ , τότε να βρείτε το  $|z_1 + z_2|$ .

**Μονάδες 7**

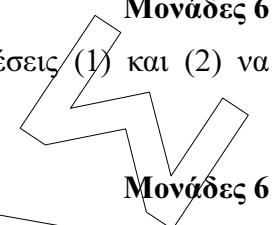
- B3.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του  $|w|$ .



**Μονάδες 6**

- B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \leq |z - w| \leq 4$$



**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x-1) \ln x - 1, \quad x > 0$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $I_1 = (0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $I_2 = [1, +\infty)$ . Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x^{x-1} = e^{2013}, \quad x > 0$  έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

**Μονάδες 6**

- Γ3.** Αν  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (x_1, x_2)$  τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

**Μονάδες 6**

- Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x) + 1$  με  $x > 0$ , τον άξονα  $x'$  και την ευθεία  $x = e$

**Μονάδες 7**

## ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία για κάθε  $x > 0$  ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t) dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot |f(x)|$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 10**

Αν είναι  $f(x) = e^{-x} (\ln x - x), \quad x > 0$ , τότε:

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ (f(x))^2 \eta \mu \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

**Μονάδες 5**

- Δ3.** Με τη βοήθεια της ανισότητας  $\ln x \leq x - 1$ , που ισχύει για κάθε  $x > 0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x > 0,$$

όπου  $a > 0$ , είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \quad \text{για κάθε } x > 0 \text{ (μονάδες 4).}$$

- Δ4.** Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός  $\beta > 0$ . Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (\beta, 2\beta)$  τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 4**

