ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μαθηματικά

κατεύθυνσης

ΣΥΓΧΡΟΝΟ

σύγχρονο
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ- ΘΕΤΙΚΗ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΕΠΑ.Λ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολ. Βιβλίου, σελ.: 253

Α2. Θεωρία Σχολ. Βιβλίου, σελ.: 191

Α3. Θεωρία Σχολ. Βιβλίου, σελ.: 258

Α4. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1)+(z+1)(\overline{z}+1)=4 \Leftrightarrow 2z\overline{z}+2=4 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,0) και ακτίνα ρ=1.

Β2. Ισχύει ότι

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=2 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1=2 \Leftrightarrow 2-z_1\overline{z}_2-z_2\overline{z}_1=2$$

$$\Leftrightarrow z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1=0 \quad (1)$$

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1\overset{(1)}{=}|z_1|^2+|z_2|^2=2$$

Άρα $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

Β3. Έστω $w=x+iy$ με $x,y\in R$, τότε:

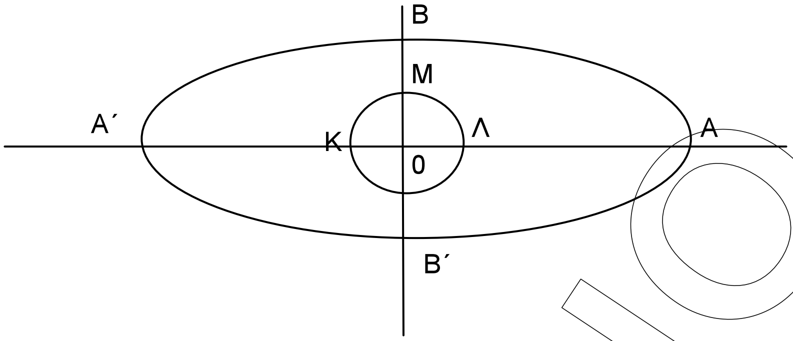
$$|w-5\overline{w}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5x+5yi|=12 \Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow |-2x+3yi|=6 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+9y^2}=6 \Leftrightarrow$$

$$4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w, είναι έλλειψη με εστίες στον χχ' άξονα, με α=3, β=2

Επίσης η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι $|w|_{max}=\alpha=3$ και η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι $|w|_{min}=\beta=2$

Β4. Από το παρακάτω σχήμα έχουμε ότι $|z-w|_{max}=(ΚΑ)=(ΚΟ)+(ΟΑ)=1+3=4$ και $|z-w|_{min}=(ΜΒ)=(ΒΟ)-(ΟΜ)=2-1=1$. Τελικά $1\le|z-w|\le 4$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων για x>0 με $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}=\ln x+\frac{x-1}{x}$ με x>0 .

Για x>1 έχουμε $\ln x>0$, x-1>0 άρα $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}>0$ οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Για 0<x<1 έχουμε $\ln x<0$, x-1<0 άρα $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}<0$ οπότε η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Για $x\in(0,1]$ το σύνολο τιμών $f((0,1])\overset{f\downarrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=[-1,+\infty)$

Για $x\in[1,+\infty)$ το σύνολο τιμών $f([1,+\infty)\overset{f\uparrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$

Τελικά το σύνολο τιμών της f είναι $[-1,+\infty)$

Γ2. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$x^{x-1}=e^{2013}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x^{x-1}=\ln e^{2013}\Leftrightarrow(x-1)\ln x=2013\Leftrightarrow(x-1)\ln x-1=2013-1\Leftrightarrow f(x)=2012$

Επειδή το $2012\in[-1,+\infty)$ η $f(x)=2012$ έχει μία ρίζα στο $(0,1]$ και μια ρίζα στο $(1,+\infty)$ και αφού η f είναι γνησίως μονότονη σε αυτά οι ρίζες θα είναι μοναδικές. Άρα έχει δυο θετικές ρίζες.

Γ3.

Με x>0 έχουμε

$f'(x)+f(x)=2012\Leftrightarrow f'(x)e^x+f(x)e^x=2012e^x\Leftrightarrow\left(f(x)e^x\right)'=\left(2012e^x\right)'\Leftrightarrow\left(f(x)e^x-2012e^x\right)'=0$

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x)e^x-2012e^x$, x>0

Η h συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2), $h(x_1)=h(x_2)=0$ άρα από Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε $h'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

<u>*β τρόπος*</u> Εφαρμόζουμε θ. Bolzano στη $g(x)=f'(x)+f(x)-2012$ στο $[x_1,x_2]$

Γ4. Από το σύνολο τιμών της f έχουμε ότι $f(x)\ge -1 \Leftrightarrow f(x)+1\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge 0$ με x>0

$g(1)=f(1)+1 \Leftrightarrow g(1)=0$

$g'(x)=f'(x)$ για x>0 άρα η g είναι γν. φθίνουσα $(0,1]$ και γν. αύξουσα στο $[1,+\infty)$ έχει ελάχιστο στο x=1 το g(1)=0 οπότε το 1 μοναδική ρίζα της g. Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(\frac{e^2}{4}-e-\frac{1}{4}+1\right)=\frac{e^2-3}{4}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

- Θεωρούμε συνάρτηση: $h(x)=\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$, $x>0$

Είναι $h(x)\ge 0 \Leftrightarrow h(x)\ge h(1), x>0$

Η h έχει ελάχιστο το $h(1)=0$. Η $f(t)$ συνεχής στο $(0,+\infty)$, $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ άρα η $h(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Από θεώρημα Fermat είναι $h'(1)=0$ **(1)**

$$h'(x)=f(x^2-x+1)\cdot(2x-1)-\frac{1}{e}(1-2x)$$

$$h'(1)=f(1)=-\frac{1}{e}<0$$

Η f διατηρεί πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και αφού $f(1)=-\frac{1}{e}<0$ είναι $f(x)<0$, $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{P(t)}dt+e\right)\cdot f(x)\overset{(I)}{\Leftrightarrow} f(x)=\frac{\ln x-x}{\int_1^x\frac{\ln t-t}{P(t)}dt+e}\quad \textbf{(2)}$$

- **Απόδειξη (I)**

  Θα δείξουμε ότι $\ln x-x\ne 0$, $x>0$. Θέτουμε $g(x)=\ln x-x$ άρα $g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$, $x>0$

  $g'(x)>0 \Leftrightarrow x<1$

  $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$

  Μέγιστο το $g(1)=-1$

  Άρα $g(x)\le g(1)\Leftrightarrow g(x)\le -1$, για κάθε $x>0$ οπότε $g(x)\ne 0 \Leftrightarrow \ln x-x\ne 0$, $x>0$.

  Από τη σχέση που δίνεται έχουμε:

$\int_1^x \frac{\ln t - t}{P(t)}dt + e \neq 0$, $x>0$, γιατί αν υπήρχε $x_1>0$ τότε και $\int_1^{x_1} \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e = 0$ τότε και $\ln x_1 - x_1 = 0$ (από τη δοθείσα σχέση) **άτοπο**.

- Από την **(2)** έχουμε:

Η $\ln x - x$ παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων.

Η $\frac{\ln t - t}{f(t)}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο συνεχών. Άρα η $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Από τη **(2)** προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων.

Η **(2)** γράφεται: $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$, αφού $f(x) \neq 0$

Παραγωγίζουμε $\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x$ **(3)**

(3) $\overset{x=1}{\Rightarrow} \frac{-1}{-\frac{1}{e}} = c \cdot e \Leftrightarrow c = 1$

(3) $\Rightarrow \frac{\ln x - x}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x \in (0,+\infty)$

Δ2. Θέτουμε $f(x) = u$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x}(\ln x - x) = -\infty$

Το όριο γράφεται:

$$\lim_{u\to-\infty}\left[u^2 \cdot \eta\mu\frac{1}{u} - u\right] = \lim_{u\to-\infty} u^2\left[\cdot\eta\mu\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\right] = \lim_{u\to-\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{u} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{u}\left(-\frac{1}{u^2}\right) + \frac{1}{u^2}}{-\frac{2}{u^3}} =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\frac{-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{u} + 1}{-\frac{2}{u}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{u\to-\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{u} - \left(\frac{1}{u^2}\right)}{\frac{2}{u^2}} = \lim_{u\to-\infty}\left(-\frac{\eta\mu\frac{1}{u}}{2}\right) = 0, \text{ αφού } \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{u} \underset{w\to 0}{\overset{w=\frac{1}{u}}{=}} \lim_{w\to 0}\eta\mu w = 0$$

Δ3. $F'(x) = f(x)$

$$F''(x) = f'(x) = -e^{-x}(\ln x - x) + e^{-x}\left(\frac{1}{x} - 1\right) =$$

$$= -e^{-x}\left(-\ln x + x + \frac{1}{x} - 1\right) = e^{-x}\left(x - 1 - \ln x + \frac{1}{x}\right) > 0$$

Αφού $e^{-x} > 0$, $x - 1 - \ln x \geq 0$ και $\frac{1}{x} > 0$, για $x \in (0,+\infty)$. Άρα F κυρτή.

Η F είναι συνεχής στα $[x,2x],[2x,3x]$ και παραγωγίσιμη στα $(x,2x),(2x,3x)$

Από Θ.Μ.Τ. έχουμε ότι:

Υπάρχουν $\xi_1 \in (x,2x), \xi_2 \in (2x,3x)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi_1) = \frac{F(2x) - F(x)}{x} \text{ και } F'(\xi_2) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

$\xi_1 < \xi_2 \overset{F'\uparrow}{\Longrightarrow} F'(\xi_1) < F'(\xi_2) \Leftrightarrow F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow 2F(2x) < F(3x) + F(x)$

Δ4. Θεωρούμε συνάρτηση

$h(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

Η h είναι συνεχής στο $[\beta, 2\beta]$ με $h(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta)$

Είναι $\beta < 3\beta \underset{\alpha\varphi o\acute{\upsilon} F'(x)=f(x)<0}{\overset{F\downarrow}{\Longrightarrow}} F(\beta) > F(3\beta) \Rightarrow h(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ αφού από τη σχέση του Δ3 έχουμε: $F(\beta) + F(3\beta) > 2F(2\beta) \Leftrightarrow 2F(2\beta) - F(\beta) < F(3\beta) \Leftrightarrow 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\beta, 2\beta)$ ώστε $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$

Αφού $h'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$ η h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ είναι μοναδικο.

Επιμέλεια: Γ. Μπέκος – Ι. Τσακμάκη Β. – Γερωνυμάκης
