ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

γενικής παιδείας

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία Σχολ. Βιβλίου, σελ.: 31

Α2. Θεωρία Σχολ. Βιβλίου, σελ.: 148

Α1. Θεωρία Σχολ. Βιβλίου, σελ.: 96

Α4. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το σημείο του άξονα των F_i% που αντιστοιχεί στο 50% φέρνουμε παράλληλη στον οριζόντιο άξονα η οποία τέμνει το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων στο σημείο από το οποίο φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα που το τέμνει στο σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 25. **Άρα η διάμεσος είναι 25.**

Β2. Η διάμεσος χωρίζει το πλήθος των παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη. Άρα

$(\alpha+4)+(3\alpha-6)=(2\alpha+8)+(\alpha-2)\Leftrightarrow 4\alpha-2=3\alpha+6\Leftrightarrow \alpha=8$, αφού η διάμεσος **δ = 25**.

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	f_i%	N_i%	F_i%
[5, 15)	10	12	20	12	20
[15, 25)	20	18	30	30	50
[25, 35)	30	24	40	54	90
[35, 45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		**60**	**100**		

Β3. $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{120+360+720+240}{60}=\dfrac{1440}{60}=24$

$$s^2=\frac{1}{\nu}\cdot\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\bar{x}\right)^2\cdot\nu_i=\frac{1}{60}\cdot\left[(10-24)^2\cdot12+(20-24)^2\cdot18+(30-24)^2\cdot24+(40-24)^2\cdot6\right]=$$

$=\dfrac{1}{60}(2352+288+864+1536)=\dfrac{5040}{60}=84$. Άρα $s=\sqrt{84}\simeq 9{,}17$

B4. Από την κλάση [35, 45) παίρνουμε το $\frac{4}{5}$ των μαθητών αφού οι παρατηρήσεις θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση. Άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν 37 λεπτά είναι $\frac{4}{5}\cdot 10\% = 8\%$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα

Α: «Να μαθαίνει Γαλλικά»

Β: «Να μαθαίνει Ισπανικά»

Τότε: $P(A) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(B) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$

$P(A\cap B) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$

$$P(A\cup B) = \lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1}\frac{2(x^2-1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Γ1. $P(A\cup B) = 1 = P(\Omega)$ άρα $A\cup B = \Omega$, βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nu^2 + 1 = 3\nu + 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu(\nu-3) = 0 \Leftrightarrow \nu = 3$, αφού $\nu \geq 3$

Γ3. $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = P(A-B) + P(B-A) =$ (αφού Α-Β, Β-Α ασυμβίβαστα)

$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{9}{4} - \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Γ4. $P(A\cap B) = \frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \frac{8}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$ μαθητές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x - \left(1+\ln^2 x\right)}{x^2} = \frac{2\ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = -\frac{\ln^2 x - 2\ln x + 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \prec 0$, για $x \neq e$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

Δ2. $(\mathrm{OKM\Lambda}) = \mathrm{OK}\cdot\mathrm{O\Lambda} = |x|\cdot|f(x)| \underset{f(x)>0}{\overset{x>0}{=}} x\cdot f(x) = x\cdot\frac{1+\ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x,\ \ x \succ 0$

Το εμβαδόν είναι:

$E(x) = 1 + \ln^2 x,\quad x \succ 0$

$E'(x)=\frac{2}{x}\cdot\ln x$

$E'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$

$E'(x)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x\succ 0\Leftrightarrow x\succ 1$

x	0	1	$+\infty$
$E'(x)$	-	0	+
$E(x)$	↘		↗

Ελάχιστο εμβαδόν για x = 1. Είναι f(1) = 1. Άρα ΟΚ = ΟΛ = 1 οπότε ΟΚΜΛ τετράγωνο.

Δ3. Είναι Σ(1, 1)

$f'(1)=\lambda_\varepsilon\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon=-1$. Άρα ε: $y=-x+\beta$, $\beta\neq 10$

Είναι $y_i=-x_i+\beta$, $i=1, 2, \dots, 10$

$\bar{y}=-\bar{x}+\beta=-10+\beta$, η μέση τιμή των τεταγμένων

$S_y=|-1|\cdot S_x\Leftrightarrow S_y=S_x=2$

$CV_y=\frac{S_y}{|\bar{y}|}=\frac{2}{|-10+\beta|}$. Το δείγμα είναι ομοιογενές αν

$CV_y\leq\frac{10}{100}\Leftrightarrow\frac{2}{|-10+\beta|}\leq\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{20}{|-10+\beta|}\leq 1\Leftrightarrow\frac{20}{|-10+\beta|}\leq 1\Leftrightarrow|\beta-10|\geq 20\Leftrightarrow\beta-10\leq -20$ **ή**

$\beta-10\geq 20\Leftrightarrow\beta\leq -10$ **ή** $\beta\geq 30$

Δ4. $(A\cap B)\subseteq(A\cup B)\Rightarrow P(A\cap B)\leq P(A\cup B)\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(P(A\cap B))\geq f(P(A\cup B))$ **(1)**

$A\subseteq(A\cup B)\Rightarrow P(A)\leq P(A\cup B)\overset{f\downarrow}{\Rightarrow}f(P(A))\geq f(P(A\cup B))$ **(2)**

(1) + (2) $\Rightarrow f(P(A))+f(P(A\cap B))\geq 2f(P(A\cup B))$