ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 260

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 280

Α3.
- **α)** Σωστό
- **β)** Σωστό
- **γ)** Λάθος
- **δ)** Λάθος
- **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z-3i|=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z-(0+3i)|=1$$

Κύκλος κέντρου Κ(0,3) και ακτίνα ρ=1

Β2.

Από Β1 έχουμε: $|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

Β3.

$$\overline{w}=\overline{z}+3i+\frac{1}{\overline{z}+3i}=\frac{1}{z-3i}+z-3i=w$$

Άρα $w\in\Re$

$$|w|=\left|z-3i+\frac{1}{z-3i}\right|\le|z-3i|+\frac{1}{|z-3i|}=$$

$$=|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2$$

Άρα, $|w|\le 2 \Leftrightarrow -2\le w\le 2$, αφού $w\in\Re$

Β4.

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}\Leftrightarrow z-w=3i-\frac{1}{z-3i}$$

Άρα, $|z-w|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-\overline{z}-3i|=|-\overline{z}|=|z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η σχέση γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) + e^x f''(x) - e^x = f'(x) + x \cdot f''(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1 \qquad (1)$$

$$(1) \overset{x=0}{\Longrightarrow} c_1 = -1$$

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - x \cdot f'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow (e^x - x) f'(x) = e^x - 1 \ (2)$$

Θεωρούμε ότι, $g(x) = e^x - x, x \in \Re$ άρα $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$. Άρα, $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0$ για κάθε $x \in R$

$$(2) \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2 \qquad (3)$$

$$(3) \overset{x=0}{\Longrightarrow} c_2 = 0$$

Από τη (3), έχουμε:

$$f(x) = \ln(e^x - x), x \in \Re$$

Γ2.

$f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}, x \in R$,όμως στο Γ1 αποδείξαμε ότι $g(x) = e^x - x > 0$ για κάθε $x \in R$

$f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.Τελικά η f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και έχει ελάχιστο το f(0)=0.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘		↗

Επίσης για $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0$ και για $x < 0 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0$

Γ3.

$$f''(x) = \frac{e^x(2-x) - 1}{(e^x - x)^2}, x \in R$$

θεωρούμε συνάρτηση $K(x) = e^x(2-x) - 1,\ x \in R$ με $K'(x) = e^x(1-x),\ x \in R$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$k'(x)$	+	0	-
$k(x)$	↗		↘

Η K(x) συνεχής στα [-2,1], [1,2], με $K(-2)=\frac{4}{e^2}-1<0,\ K(1)=e-1>0,\ K(2)=-1<0$

Από το θ. Bolzano, υπάρχουν $\xi_1\in(-2,1)$, $\xi_2\in(1,2)$ ώστε $K(\xi_1)=0$ και $K(\xi_2)=0$, δηλαδή $f''(\xi_1)=0$ και $f''(\xi_2)=0$. Επειδή η K(x) είναι γνησίως μονότονη στα (-2,1), (1,2) τα ξ_1,ξ_2 είναι μοναδικά. Άρα, η f'' έχει ακριβώς δύο ρίζες.

- Για $-2<x<\xi_1 \overset{\kappa\uparrow}{\Longrightarrow} K(x)<K(\xi_1)=0 \Rightarrow f''(x)<0$

  Για $1>\chi>\xi_1 \overset{\kappa\uparrow}{\Longrightarrow} K(x)>K(\xi_1)=0 \Rightarrow f''(x)>0$

  Άρα, το ξ_1, είναι θέση σημείου καμπής.

- Για $1<\chi<\xi_2 \overset{\kappa\downarrow}{\Longrightarrow} K(x)>K(\xi_2)=0 \Rightarrow f''(x)>0$

  Για $\xi_2<x<2 \overset{\kappa\downarrow}{\Longrightarrow} K(x)<K(\xi_2)=0 \Rightarrow f''(x)<0$

  Άρα, το ξ_2, είναι θέση σημείου καμπής.

Τελικά, η C_f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4.

Θεωρούμε $h(x)=\ln(e^x-x)-\text{συν}x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

h συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

$h(0)=-\text{συν}0=-1<0$

$h(\frac{\pi}{2})=\ln(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2})-\text{συν}\frac{\pi}{2}=\ln(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})>0$, αφού f(x)>0, $x\in R-\{0\}$ (από Γ2)

$h(0)\cdot h(\frac{\pi}{2})<0$ Άρα, από θ. Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της h(x)=0 στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

$h'(x)=f'(x)+\eta\mu x>0$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$, αφού $f'(x)>0$ για x>0 (από Γ2) και ημx>0 στο $(0,\frac{\pi}{2})$.

Δηλαδή η h, γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θέτουμε u=x+t, du=dt, $u_1=x,\ u_2=0$

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_o^x \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du \Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\int_o^x \frac{e^{2u}\cdot e^{-2x}}{g(u)}du \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^{2x}}\cdot\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du \Leftrightarrow f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

Ομοίως, $g(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du$

Επειδή η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής στο $\Re$, ως πηλίκο συνεχών η συνάρτηση $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$. Άρα, f, g παραγωγίσιμες στο $\Re$.

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow e^{2x}=f'(x)\cdot g(x) \qquad (1)$$

$$g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow e^{2x}=f(x)\cdot g'(x) \qquad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow f'(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g'(x)$

$$\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}=c \qquad (3)$$

$f(0)=g(0)=1$. Από την (3) $\xrightarrow{x=0} c=1$

Άρα, f(x)=g(x), για κάθε $x\in\Re$

Δ2.

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2\cdot f'(x)\cdot f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))'=(e^{2x})' \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1 (2), x\in\Re$$

$$\overset{x=0}{\Longrightarrow} f^2(0)=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$$

Από τη (2), έχουμε: $f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow f(x)=e^x, x\in\Re$, αφού $f(x)>0$.

Δ3.

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}(x\cdot e^{-\frac{1}{x}})=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=$$

$$\overset{DLH}{=}\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}(-e^{-\frac{1}{x}})=-\infty.$$

Δ4.

Για $x \in [0,1]$, $F(x) = \int_1^x f(t^2)dt = -\int_x^1 f(t^2)dt \leq 0$, αφού $f(t^2) = e^{t^2} > 0$, $t \in [x,1]$

$$E = -\int_0^1 F(x)dx = -\int_0^1 (x)' F(x)dx =$$

$$= -F(1) + \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (e^{x^2})' dx = \frac{1}{2} \cdot \left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{e-1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Επιμέλεια: Γ. Μπέκος - Ι. Τσακμάκη - Β. Γερωνυμάκης

Σ Χ Ο Λ Ι Ο

- ✓ Τα Θέματα για την εξέταση του μαθήματος **Μαθηματικά** κατεύθυνσης στις Πανελλαδικές Εξετάσεις 2011 κρίνονται μέτριας δυσκολίας, με εξαίρεση το Γ3 που είναι για δυνατούς λύτες.
- ✓ Πρβλ. ΣΥΓΧΡΟΝΗ βιβλιοθήκη, **Μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' λυκείου**, Γ. Μπέκος, σ.