

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Μαθηματικά

κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ Α

A1. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 304

A2. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 279

A3. ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ, ΣΕΛ. 273

- A4. α) ΣΩΣΤΟ
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΛΑΘΟΣ
δ) ΛΑΘΟΣ
ε) ΣΩΣΤΟ

Σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ - ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ - ECDL

ΘΕΜΑ Β

B1. $z + \frac{2}{z} = 2 \Rightarrow z^2 + 2 = 2z \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$ άρα, $\Delta = -4 < 0$, $z_1, z_2 = \frac{2 \pm i2}{2} = 1 \pm i$

άρα $z_1 = 1+i$ και $z_2 = 1-i$

B2. $z_1^{2010} + z_2^{2010} = (1+i)^{2010} + (1-i)^{2010} = [(1+i)^2]^{1005} + [(1-i)^2]^{1005} = (2i)^{1005} + (-2i)^{1005} = 0$

B3. $|w - 4 + 3i| = |z_1 - z_2| = |1+i - (1-i)| = |2i| = 2$ άρα οι εικόνες του w είναι σε κύκλο με κέντρο $\kappa(4, -3)$ και $\rho = 2$

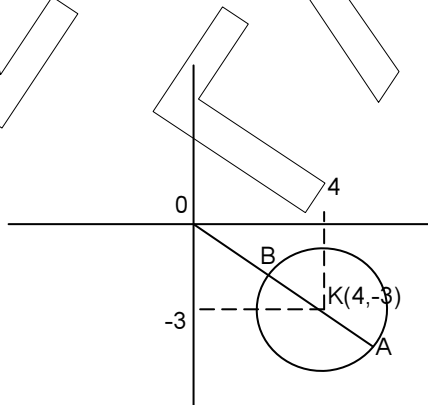
B4.

• $|w|_{\max} = (OA) = (OK) + \rho$

$(OK) = \sqrt{16+9} = 5$

$|w|_{\max} = 5 + 2 = 7$

• $|w|_{\min} = (OB) = (OK) - \rho = 5 - 2 = 3$ άρα $3 \leq |w| \leq 7$



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + x + 1)}{x^2 + 1}$$

$x^2 + x + 1 > 0$, άρα $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα f^{-1} υπάρχει

Γ2. $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right] \Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln x[x^4 + 1] \Leftrightarrow$

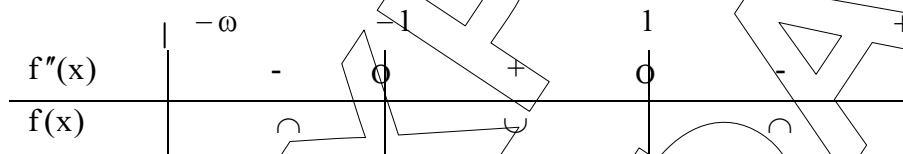
$$2x^2 - 2(3x - 2) = \ln[(3x - 2)^2 + 1] - \ln[x^4 + 1] \Rightarrow 2x^2 + \ln[x^4 + 1] = \ln[(3x - 2)^2 + 1] + 2(3x - 2) \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) = f((3x - 2)^2) \stackrel{f^{-1}-1}{\Leftrightarrow} x^2 = 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0. \text{ Τελικά } x_1 = 1, x_2 = 2$$

Γ3. $f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - (2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2(x - 1)(x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$



άρα η f έχει δύο σημεία καμπής το $A(-1, f(-1))$ και $B(1, f(1))$
 $A(-1, -2 + \ln 2)$ και $B(1, 2 + \ln 2)$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Α: $\varepsilon_1: y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow \varepsilon_1: y + 2 - \ln 2 = (x + 1) \Leftrightarrow$
 $\varepsilon_1: y = x + 1 - 2 + \ln 2 \Leftrightarrow \varepsilon_1: y = x - 1 + \ln 2$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Β: $\varepsilon_2: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow \varepsilon_2: y - 2 - \ln 2 = 3(x - 1) \Leftrightarrow$
 $\varepsilon_2: y = 3x - 3 + 2 + \ln 2 \Leftrightarrow \varepsilon_2: y = 3x - 1 + \ln 2$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_1: y = x - 1 + \ln 2 \\ \varepsilon_2: y = 3x - 1 + \ln 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \ln 2 \end{cases}. \text{ Άρα σημείο τομής } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \text{ } K(0, -1 + \ln 2) \text{ στο } yy'$$

Γ4. $I = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 [2x^2 + x \ln(x^2 + 1)] dx = 2 \int_{-1}^1 x^2 dx + 2 \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx \quad (1)$

$$J = \int_{-1}^1 x \ln(x^2 + 1) dx \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \int_2^2 \ln u du = 0 \quad (2).$$

* Θέτω $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$ άρα $u_1 = 2$ και $u_2 = 2$. Άρα $(1) \Rightarrow I = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Σ σύγχρονο

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
 ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ - ΘΕΤΙΚΗ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ
 ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ - ECDL

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Ενδεικτικές Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t} dt$. Η συνάρτηση $x + 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως

πολυωνυμική. Η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο των συνεχών

συναρτήσεων t και $f(t) - t$ άρα η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t} dt$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Τελικά η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{f(x)-x} = \frac{f(x)}{f(x)-x}$$

Δ2.

$$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x \cdot f'(x) = 2f'(x) \cdot [f(x) - x] - 2f(x) = 2 \cdot \frac{f(x)}{f(x)-x} \cdot (f(x) - x) - 2f(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0. \text{ Άρα η } g \text{ είναι σταθερή στο } \mathbb{R}.$$

Δ3. $g(x) = c$ (1) με $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{Άρα } (f(x))^2 - 2xf(x) = c \Leftrightarrow (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = c + x^2 \Leftrightarrow [f(x) - x]^2 = c + x^2 \quad (2)$$

$$\bullet f(0) = 3. \text{ Από } (2) \Rightarrow 3^2 = c \Leftrightarrow c = 9.$$

Από (2) $\Rightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 9$ (3). Επειδή $f(x) \neq x \Leftrightarrow f(x) - x \neq 0$ και $f(x) - x$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επειδή $f(0) = 3 > 0$ είναι $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$ άρα $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την (3) έχουμε:

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + x, x \in \mathbb{R}$$

Δ4. Θεωρώ συνάρτηση $\phi(x) = \int_0^x f(t) dt, x \in \mathbb{R}$. Για την ϕ ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

στα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$. Άρα υπάρχουν $\xi_1 \in [x, x+1]$ και $\xi_2 \in [x+1, x+2]$ τέτοια ώστε

$$\phi'(\xi_1) = \phi(x+1) - \phi(x) = \int_0^{x+1} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = \int_x^{x+1} f(t) dt = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

$$\phi'(\xi_2) = \phi(x+2) - \phi(x+1) = \int_0^{x+2} f(t) dt - \int_0^{x+1} f(t) dt = \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt = \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt. \quad \text{Όμως}$$

$$\phi'(x) = f(x) > 0 \Rightarrow \phi''(x) = f'(x) > 0 \text{ στο } \mathbb{R} \text{ αφού } f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}} > 0.$$

(Ισχύει $f(x) > 0$ αφού $\sqrt{x^2+9} + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

$$\text{Άρα } \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow \phi'(\xi_1) < \phi'(\xi_2) \Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Β' τρόπος: Έστω } t \in \mathbb{R}, \text{ με } t < t+1 \Leftrightarrow f(t) < f(t+1) \Rightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt < \int_x^{x+1} f(t+1) dt \quad (1)$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Ενδεικτικές Απαντήσεις

Με αλλαγή μεταβλητής $u = t + 1$ έχουμε ότι $\int_x^{x+1} f(t+1)dt = \int_{x+1}^{x+2} f(u)du = \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$. Άρα η (1)

γίνεται: $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

Επιμέλεια: Β. Γερωνυμάκης – Γ. Μπέκος – Ι. Γσακμάκη

