Μαθηματικά

προσανατολισμού

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 140 -142.

Α2.

α)Η πρόταση είναι (ψ) ψευδής.

β) Θεωρούμε $f(x)=x^4$ τότε $f''(x)=12x^2$, άρα η f είναι κυρτή στο R όμως $f''(0)=0$.

Α3. **δ**

Α4.

α. Σωστό

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_h=R$.Η h είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

- $h'(x)=\dfrac{e^x(1+e^{2x})-2e^{2x}e^x}{(1+e^{2x})^2}=\dfrac{e^x-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\dfrac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{(1+e^{2x})^2}$

- $h'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{(1+e^{2x})^2}=0\Leftrightarrow x=0$

- $h'(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{(1+e^{2x})^2}>0\Leftrightarrow 1-e^{2x}>0\Leftrightarrow 0>x$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	↗		↘

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα για x<0 και γνησίως φθίνουσα για $x\geq 0$ και έχει μέγιστο στο x=0 το $h(0)=\dfrac{1}{2}$.

Β2. $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\overset{D.L.H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2e^{2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^x}=0$$

- $h\left((-\infty,0]\right) \overset{h\nearrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to-\infty} h(x), h(0)\right] = \left(0,\frac{1}{2}\right]$

- $h\left([0,+\infty)\right) \overset{h\searrow}{=} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), h(0)\right] = \left(0,\frac{1}{2}\right]$

Άρα το σύνολο τιμών της είναι $h(R)=\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

Β3. Η h είναι συνεχής στο R άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y=0 στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β4.

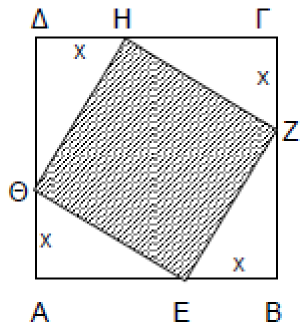
$$\int_0^1 e^x h(x)dx = \int_0^1 e^x \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(1+e^{2x}\right)'}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|1+e^{2x}\right|\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+e^2\right) - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right).$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο ΕΖΒ τρίγωνο έχουμε $EZ^2 = EB^2 + BZ^2 \Leftrightarrow EZ^2 = x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4$ με $0 \le x \le 2$

Άρα $EZ = \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$.



Γ2. Το εμβαδό του τετραγώνου ΕΖΗΘ είναι:

$(EZH\Theta) = EZ^2 = 2x^2 - 4x + 4$ με $0 \le x \le 2$ άρα

$f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ με $D_f = [0,2]$.

Γ3. $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ με $D_f = [0,2]$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 4x - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο (ολικό) στο x=1 το f(1)=2 και έχει τοπικό μέγιστο στο x=0 το f(0)=4 και στο x=2 το f(2)=4. Το εμβαδό γίνεται ελάχιστο για x=1 και γίνεται μέγιστο για x=0 ή x=2.

Γ4. Ισχύει ότι

- $f([0,1]) \overset{f\searrow}{=} [f(1), f(0)] = [2,4]$
- $f([1,2]) \overset{f\nearrow}{=} [f(1), f(2)] = [2,4]$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f([0,2])=[2,4]$.

Έστω $x_0 \in [0,2]$ ώστε $f(x_0) = 4e^{x_0} + 1$ τότε $4e^{x_0} + 1 \in [2,4]$

Άτοπο γιατί $4e^{x_0} + 1 > 4$ αφού $x_0 \geq 0 \Leftrightarrow e^{x_0} \geq 1 \Leftrightarrow 4e^{x_0} \geq 4 \Leftrightarrow 4e^{x_0} + 1 \geq 5 > 4$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών και αφού είναι συνεχής στο [0,3] και παραγωγίσιμη στο (0,3) ισχύει ότι f(0)=f(3), άρα f(3)=2.
Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό της f′ και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ. άρα ισχύει:

$$\int_0^3 |f'(x)|\,dx = 8 \quad (1)$$

Από το σχήμα έχουμε ότι η $f'(x) \leq 0$ για $x \in [0,2]$ και $f'(x) \geq 0$ για $x \in [2,3]$

$$(1) \Rightarrow -\int_0^2 f'(x)dx + \int_2^3 f'(x)dx = 8 \Leftrightarrow -[f(x)]_0^2 + [f(x)]_2^3 = 8 \Leftrightarrow -f(2) + f(0) + f(3) - f(2) = 8 \Leftrightarrow -2f(2) = 4 \Leftrightarrow f(2) = -2$$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\ln x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = -3$. Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$ η f συνεχής , επίσης η f παραγωγίσιμη

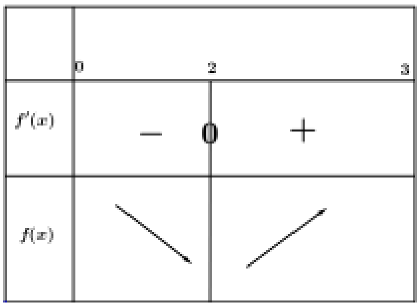
και η f' συνεχής στο x=1 (από σχήμα) με $\lim\limits_{x\to 1} f'(x) = f'(1) = -3$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{f(x)-2} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f'(x)} = -\infty$

αφού ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 2$ η f συνεχής, επίσης η f παραγωγίσιμη στο [0,3], η f' συνεχής στο x=0 (από σχήμα) με $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 0$ και $f'(x) < 0$ κοντά στο x=0.

Δ2. •Από το σχήμα έχουμε ότι η $f'(x) < 0$ για $x \in (0,2)$ και $f'(x) > 0$ για $x \in (2,3]$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2] και γνησίως αύξουσα στο [2,3] άρα η f έχει στο x=2 τοπικό ελάχιστο (ολικό) το f(2)=-2 και έχει τοπικό μέγιστο στο x=0 και x=3 το f(0)=f(3)=2.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ 2017
Ενδεικτικές Απαντήσεις



●Από το σχήμα έχουμε ότι η f' γ. φθίνουσα για $x\in[0,1]$ άρα η f κοίλη $[0,1]$ και η f' γ. αύξουσα για $x\in[1,3]$ άρα η f κυρτή $[1,3]$.
Η f έχει στο x=1 σημείο καμπής το (1,0).

Δ3. Η f συνεχής στο [2,3] με f(2)f(3)= -4<0 άρα από θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in(2,3)$ ώστε $f(x_0)=0$ και αφού η f γνησίως αύξουσα στο [2,3] , υπάρχει μοναδικό.

Για $2<x<x_0<3 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<0,\ \lim_{x\to x_0} f(x)=0$ άρα $\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty$

Για $2<x_0<x<3 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} 0<f(x),\ \lim_{x\to x_0} f(x)=0$ άρα $\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

Τελικά δεν υπάρχει όριο.

Δ4.